

5. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Poloměr konvergence). Necht' $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $R \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < R$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > R$, uvedená řada diverguje.

Prvek R splňuje

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0 .

Poznámka 2. Mějme mocninnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$$

potom je rovna poloměru konvergence R této mocninné řady.

Věta 3 (Operace s mocninnými řadami). Necht' $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence R_1 a R_2 . Pak

- $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}$,
- $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^n a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}$.

Příklady

Určete poloměr konvergence R následujících mocninných řad a také konvergenci na hranici.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$

kde $(0 < \alpha < 1)$

Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0,$$

a tedy $R = +\infty$.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$

kde $p \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro každé $p \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \right| = 1,$$

tudíž poloměr konvergence je vždy 1.

Chování na hranici:

Pokud $p > 1$, pak řada konverguje absolutně na hranici.

Pokud $1 \geq p > 0$, potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p},$$

konverguje neabsolutně dle Leibnize. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

diverguje.

Pro $p > 0$ řada na hranici diverguje.

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$

kde ($a > 1$)

Řešení:

Platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{(n+1)^2 - n^2}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty.$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

Řešení:

Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|3^n + (-2)^n|}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{|1 + (-2/3)^n|}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

tudíž poloměr konvergence je $\frac{1}{3}$.

Chování na hranici: Je třeba vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

V prvním případě máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n},$$

což porovnáme s řadou $b_n = 1/n$, což diverguje.

V druhém případě získáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2^n}{n3^n}.$$

První část konverguje z Leibnize, druhá z d'Alamberta, tedy konverguje. Absolutní konvergenci již vyloučil první případ.

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

Řešení:

Jedná se o mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou povětšinou nulové, s výjimkou koeficientů u x^{n^2} . Uvědomte si nyní, že koeficient $\frac{1}{2^n}$ je koeficient nikoliv u n -tého, ale n^2 -tého členu této řady! Abychom mohli použít vztahy pro výpočet poloměru konvergence, potřebujeme najít vztah pro n -tý koeficient a_n !

Jestliže ale platí

$$a_{n^2} = \frac{1}{2^n} \quad \text{a koeficienty jsou jinde nulové,}$$

potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} && \text{pokud } n = k^2 \text{ pro nějaké } k \text{ přirozené} \\ a_n &= 0 && \text{jinak} \end{aligned}$$

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu spočteme

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\sqrt{n} \cdot \frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Na hranici řada zjevně konverguje absolutně.

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$$

Řešení: Platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

Pro konvergenci na hranici využijeme odhadů dokazatelných indukcí

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Z prvního odhadu je zřejmé, že pro $x = 1$ řada diverguje srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{2n+1}$. Z druhého odhadu vyplývá, že pro $x = -1$ řada konverguje neabsolutně podle Leibnize. (nutno dokázat monotonii posloupnosti $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$).

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$$

Řešení: Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{[3 + (-1)^n]^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n] = 4.$$

Tudíž $R = \frac{1}{4}$.

Konvergence na hranici: Vyšetřujeme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n}$$

Podíváme-li se pouze na sudé členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{2n} \frac{1}{4^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n},$$

která diverguje.

Pro liché členy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{4^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}},$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}},$$

které konvergují absolutně.

Sečtením „liché“ a „sudé části“ řady dospíváme k závěru, že pro $\alpha = 0$ řada na hranici diverguje.

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$

kde $a > 0$, $b > 0$.

Řešení:

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\max(a, b)} \sqrt[n]{\frac{\max(a^n, b^n)}{a^n + b^n}} = \frac{1}{\max(a, b)},$$

a tudíž

$$R = \max(a, b).$$

Na hranici řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max(a, b)^n}{a^n + b^n} \rightarrow 1 \neq 0.$$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Řešení:

Je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Tudíž poloměr konvergence je 4.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n 4^n.$$

Pro $x = -4$ máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 x^n 4^n}{(2n)!}$$

použijeme Leibnize a zjišťujeme, zda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

jde k 0. Porovnáme a_n a a_{n+1} :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! n! 4^n (2n+2)!}{(2n)! (n+1)! (n+1)! 4 \cdot 4^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$$

Tedy posloupnost a_n je rostoucí, první člen je roven 1, tedy zjevně nejde k 0, tedy řada diverguje v bodě -4. Tedy v bodě 4 také.

Závěr: řada konverguje na $(-4, 4)$.

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

a tedy $R = \frac{1}{e}$.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} (-1)^n.$$

Platí ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nespĺňuje nutnou podmínku konvergence $a_n \rightarrow 0$. Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \frac{1}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \right] = \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2}) \right) - x \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} + o(1) \right] = e^{-1/2+0} = e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Závěr: řada konverguje na $(-1/e, 1/e)$.

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$

kde $a > 0$.

Řešení:

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a^{-\sqrt{n} \cdot 1/n} = a^0 = 1.$$

Tedy

$$R = 1.$$

Pokud $a > 1$, potom řada na hranici konverguje absolutně, což ze srovnání

$$\frac{\frac{1}{a\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{a\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Limitu lze spočítat například použitím Heineho věty a dvojnásobným aplikováním l'Hopitalova pravidla.)

Pokud $0 < a \leq 1$, potom řada na hranici diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, $a_n \not\rightarrow 0$.

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \cdot x^n,$$

kde $a > 0, b > 0$.

Řešení: Máme

$$a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$$

Vyšetříme dva případy, nejprve $a \geq b$, pak

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{a^n}{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2a^n}{n}} \stackrel{VOAL}{=} a$$
$$\rho = \frac{1}{a}$$

analogicky pro $a < b$:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2b^n}{n}} \stackrel{VOAL}{=} b$$
$$\rho = \frac{1}{b}$$

Tedy $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.

Krajní body vyšetříme pro oba případy zvlášť. Řadu rozvíjíme v 0, tedy krajní body jsou $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ a $-\rho = -\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.

Nechť $a \geq b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{b^n}{a^n n^2} \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Použijeme porovnání řad (vše je tu kladné!) a zjistíme, že řada diverguje, jelikož je to kladné, tak i v absolutní hodnotě. Druhý krajní bod:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{(-1)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n b^n}{a^n n^2} \right)$$

Toto můžeme roztrhnout na 2 konvergentní řady, první konverguje z Leibnize, druhá taktéž. Tedy řada v krajním bodě $-1/a$ konverguje, ale nikoli absolutně.

Nechť $a < b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{b^n n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Toto opět roztrhneme na 2 řady, první konverguje z d'Alembertova kritéria, o druhé to víme. Tedy roztržení bylo korektní (roztrhli jsme na 2 konvergentní řady), řada konverguje. Dosadíme-li následně jako krajní bod $-1/b$, můžeme rozvnou říci, že řada konverguje absolutně.

Tím jsme hotovi, jen je třeba dát pozor na případ $a = b$.