

7. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. $f(x) = (1 + \sin x + \cos x)$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

2. $f(x) = (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)$

Řešení: Roznásobením

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx = x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

3. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2} \right) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C.$$

4. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x - \arctan x + C.$$

5. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1} \right) dx = \int \left(1 - \frac{4}{1-x^2} \right) dx = x - 2 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

6. $f(x) = (e^{-x} + e^{-2x})$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = -x$, resp. $y = -2x$ dostaneme

$$\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx \stackrel{C}{=} -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

7. $f(x) = (3 - x^2)^3$

Řešení: Zřejmě

$$\int (3 - x^2)^3 dx = \int (27 - 9x^2 + 3x^4 - x^6) dx = 27x - 3x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

8. $f(x) = (\sin 5x - \sin 5\alpha)$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 5x$ dostaneme

$$\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5\alpha,$$

neboť $\sin 5\alpha$ je konstantní funkce (nezávislá na proměnné x).

9. $f(x) = \frac{1}{x + A}$

Řešení: Víme, že primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ je $\ln|x| + C$. Podle příkladu (??) tedy primitivní funkce k funkci $\frac{1}{ax+b}$ je $\frac{1}{a} \ln|ax + b| + C$. Odtud vyplývá, že (položte $a = 1$, $b = A$)

$$\int \frac{1}{x + A} dx = \ln|x + A| + C.$$

10. $f(x) = \frac{1}{2 + 3x^2}$

Řešení: Výraz převedeme na tvar $\frac{1}{1+c^2x^2}$ a poté užijeme substituci $y = cx$.

$$\int \frac{1}{2 + 3x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{6}} \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}$

Řešení: Protože je

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{y},$$

platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{-5} \cdot 2\sqrt{2 - 5x} = -\frac{2}{5}\sqrt{2 - 5x}$$

12. $f(x) = (2x - 3)^{10}$

Řešení: Je

$$\int y^{10} dy = \frac{y^{11}}{11} + C.$$

Podle příkladu (??) o lineární substituci je

$$\int (2x - 3)^{10} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x - 3)^{11}}{11} + C.$$

13. $f(x) = \cotg^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \cotg^2 x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = -\cotg x - x + C.$$

14. $f(x) = \tg^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \tg^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \tg x - x + C.$$

15. $f(x) = \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 2x + \frac{\pi}{4}$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \cotg \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

16. $f(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^2$

Řešení: Sledujte výpočet.

$$\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right) \, dx = -\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x + C.$$

17. $f(x) = \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right)$, $a \in \mathbb{R}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) \, dx = a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

18. $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x\sqrt{x}}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\begin{aligned} \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x\sqrt{x}} \, dx &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x^{3/2}} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) x^{3/4} \, dx = \int \left(x^{3/4} - x^{-2+3/4} \right) \, dx = \\ &= \int \left(x^{3/4} - x^{-5/4} \right) \, dx = \frac{x^{7/4}}{7/4} - \frac{x^{-1/4}}{-1/4} = \frac{4}{7} x^{7/4} + 4x^{-1/4} + C. \end{aligned}$$

$$19. f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \arcsin x + \ln$$

$$20. f(x) = (2^x + 3^x)^2$$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

$$21. f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$$

Řešení: Je

$$\int \sqrt[3]{y} dy = \frac{y^{4/3}}{4/3} + C.$$

Podle příkladu (??) o lineární substituci je

$$\int \sqrt[3]{1-3x} dx = -\frac{1}{3} \frac{(1-3x)^{4/3}}{4/3} + C = -\frac{1}{4} \sqrt[3]{(1-3x)^4} + C.$$

$$22. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$$

Řešení: Analogicky jako v předchozím příkladu

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x$$