

11. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (O rozkladu na parciální zlomky). Nechtě P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) stupeň polynomu P je menší než stupeň polynomu Q ,

(ii) polynom Q lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l},$$

(iii) čísla $a_n \neq 0$, x_1, \dots, x_k a $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ a β_1, \dots, β_l jsou reálná a čísla p_1, \dots, p_k a q_1, \dots, q_l jsou přirozená,

(iv) žádné dva z mnohočlenů

$$(x - x_1), \dots, (x - x_k), (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1), \dots, (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)$$

nemají společný kořen,

(v) kvadratické trojčleny

$$(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1), \dots, (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)$$

nemají žádný reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla

$$A_{1,1}, \dots, A_{1,p_1}, A_{2,1}, \dots, A_{2,p_2}, \dots, A_{k,1}, \dots, A_{k,p_k},$$

$$B_{1,1}, C_{1,1}, \dots, B_{1,q_1}, C_{1,q_1}, \dots, B_{l,1}, C_{l,1}, \dots, B_{l,q_l}, C_{l,q_l}$$

taková, že platí:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{(x - x_1)^1} + \dots + \frac{A_{1,p_1}}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{k,1}}{(x - x_k)^1} + \dots + \frac{A_{k,p_k}}{(x - x_k)^{p_k}} + \\ &+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^1} + \dots + \frac{B_{1,q_1}x + C_{1,q_1}}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^1} + \dots + \frac{B_{l,q_l}x + C_{l,q_l}}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}. \end{aligned}$$

Příklady

$$1. f(x) = \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)}$$

$$2. f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

$$3. f(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}$$

$$4. f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2}$$

$$5. f(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2$$

$$6. f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

$$9. f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$10. f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$$

$$11. f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$$