

## 17. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, [kytaristka@gmail.com](mailto:kytaristka@gmail.com)

### Teorie

**Definice 1.** Necht'  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ . Necht'  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $(a, b)$ . Řekneme, že funkce  $f$  má na intervalu  $(a, b)$  Newtonův integrál, případně že Newtonův integrál z funkce  $f$  na intervalu  $(a, b)$  existuje, jestliže

- $f$  má na  $(a, b)$  primitivní funkci  $F$ ,
- existují limity  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$  (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny  $\mathbb{R}^*$ .

**Věta 2** (Per partes pro určitý integrál). Necht' funkce  $F$  je primitivní k  $f$  na  $(a, b)$ ,  $G$  je primitivní ke  $g$  na  $(a, b)$ . Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

**Věta 3** (Substituce pro určitý integrál). Necht'  $\omega : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  splňuje  $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$  a  $\omega$  má vlastní nenulovou derivaci na  $(\alpha, \beta)$ . Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|dt,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

### Příklady

1.  $\int_1^2 x^2 dx$

6.  $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

12.  $\int_{-1}^1 \ln|x| dx$

2.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx$

7.  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

13.  $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx$

3.  $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3} + \frac{1}{\cos^2 x} dx$

8.  $\int_0^\infty \sin x dx$

14.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

4.  $\int_a^b \operatorname{sgn} x dx$ ,  $a < 0$ ,  $b > 0$

9.  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

15.  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$

5.  $\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5} dx$

10.  $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

16.  $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$