

20. cvičení

<http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Heineova). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a necht' funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a . Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Fakt

Řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$$

konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Příklady

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$$

5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right)$$

6.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1} \cos \frac{1}{k}$$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2}}$$

8.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan \frac{2k}{1 + k^2},$$

9.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan \frac{2kx}{x^2 + k^2},$$

kde $x \in \mathbb{R}$ je parametr.

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 + 1}$$

11.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^{k^a} - 1),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4^n} \right) \sin 2^n$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}$$

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$$