Průběh funkce - teorie

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x svého
- **maxima na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x),$$

- **minima na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)),$$

- **ostrého maxima na** M, jestliže

$$\forall y \in M,\ y \neq x\colon f(y) < f(x),$$

- **ostrého minima na** M, jestliže

$$\forall y \in M,\ y \neq x\colon f(y) > f(x).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě x svého **lokálního maxima** (**lokálního minima, ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že f nabývá v bodě x svého maxima (minima, ostrého maxima, ostrého minima) na $M \cap B(x, \delta)$.

Věta 2 (nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť I je nedegenerovaný interval, f je reálná funkce a a je vnitřním bodem I. Je-li a bodem lokálního extrému funkce f, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

Věta 3 (vztah derivace a monotonie)**.** Nechť I je interval a f je spojitá funkce na I. Nechť $\operatorname{Int} I$ označuje množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť existuje $f'(x)$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$. Potom

(i) je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f rostoucí na I;

(ii) je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f neklesající na I;

(iii) je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f klesající na I;

(iv) je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f nerostoucí na I.

Definice 4. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi**, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že buď

- $$\forall x \in P_-(a,\delta): \ f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a}$$
$$\forall x \in P_+(a,\delta): \ f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)$$

  nebo

- $$\forall x \in P_-(a,\delta): \ f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a}$$
$$\forall x \in P_+(a,\delta): \ f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$$

Věta 5 (nutná podmínka pro inflexi)**.** Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f''(a)$ a je různá od nuly, pak a není inflexním bodem funkce f.

Věta 6 (postačující podmínka pro inflexi)**.** Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b) a $c \in (a,b)$. Předpokládejme, že

$$\forall x \in (a,c): \ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b): \ f''(x) < 0$$

nebo

$$\forall x \in (a,c): \ f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b): \ f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem f.

Definice 7. Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže

$$\forall x,y \in I \ \forall \lambda \in (0,1): \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **konkávní** na I, jestliže

$$\forall x,y \in I \ \forall \lambda \in (0,1): \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konvexní** na I, jestliže

$$\forall x,y \in I, x \neq y \ \forall \lambda \in (0,1): \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konkávní** na I, jestliže

$$\forall x,y \in I, x \neq y \ \forall \lambda \in (0,1): \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Věta 8 (vztah druhé derivace a konvexity či konkávnosti)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má f na $\operatorname{Int} I$ spojitou první derivaci. Jestliže je f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I. Speciálně, je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.

Definice 9. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0. \tag{1}$$

Analogicky definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 10 (tvar asymptoty)**.** Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Analogické tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Orientační postup při vyšetřování průběhu funkce $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Před tím, než začnete derivovat

- Definiční obor $\mathcal{D}(f)$: maximální množina reálných čísel, pro které je $f(x) \in \mathbb{R}$. Na definiční obor mají vliv zejména: výrazy pod odmocninou, jmenovatelé zlomků, definiční obory speciálních funkcí jako je ln, arcsin, apod.
- Sudost, lichost, periodicita: nezapomeňte, že i definiční obor hraje v těchto případech roli. S výhodou pak vyšetřujte sudou nebo lichou funkci například jen pro kladná x.
- Limity: pamatujte, že je nutno spočítat limity ve všech krajních bodech těch intervalů, které tvoří definiční obor funkce f, pokud v nich tato funkce není přímo definovaná. Tj. jde většinou o jednostranné limity. Speciálně půjde často o limity v $+\infty, -\infty$.
- Spojitost funkce: určit, kde všude je f spojitá, buď z toho, že je to součet, rozdíl atd. spojitých funkcí, nebo z toho, že má v jakýchsi bodech vlastní derivaci (jak později odhalíte).

První derivace

- Nalezení f': Zderivujte mechanicky tam, kde to lze. Určete $\mathcal{D}(f')$. V bodech a, které patří do $\mathcal{D}(f)$, ale nepatří do $\mathcal{D}(f')$, je potřeba f' spočíst jinak: pokud existuje, spočtu $\lim_{x\to a\pm} f'(x)$ (z příslušné strany). V případě, že je f spojitá v a z příslušné strany, mám tím $f'_\pm(a)$. V opačném případě mám alespoň limitní polohu „jednostranné tečny“ ke grafu funkce v kritickém bodě, to se bude taky hodit pro náčrtek. Pokud limita $\lim_{x\to a\pm} f'(x)$ neexistuje, je potřeba $f'_\pm(a)$ spočíst podle definice jednostranné derivace. Občas se vyplatí spočíst si limitu derivace i pro $\pm\infty$, pokud existuje. Hodí se to pro asymptoty, viz později.
- Intervaly monotonie f: Podle znaménka f' lze určit intervaly monotonie f. Pamatujte, že je možno tímto způsobem efektivně odhalit i lokální extrémy funkce f, lépe než počítáním vyšších derivací v těch bodech, kde $f'(x) = 0$. Například: pokud víme, že f klesá vlevo od x a roste vpravo od x, je v x lokální minimum.

Druhá a vyšší derivace

- Nalezení f'': Zderivujte mechanicky f' tam, kde to lze. Většinou se už nedělá nic dál, tj. nezkoumají se jednostranné druhé derivace ani limity druhých derivací.
- Intervaly konvexity a konkávity f: Podle znaménka f'' lze určit intervaly konvexity a konkávity f. Pamatujte, že je možno tímto způsobem efektivně odhalit i inflexní body funkce f, podobně jako v případě lokálních extrémů.
- Lokální extrémy a inflexní body: Pokud jste neodhalili lokální extrémy a inflexe při výše naznačených úvahách, lze samozřejmé studovat vyšší derivace v podezřelých bodech. Rozhodne první nenulová derivace v daném bodě. Nezapomeňte, že například lokální extrém se může nabýt i v bodě, kde neexistuje derivace (například u funkce $|x|$ v nule).
- Obor hodnot funkce $\mathcal{H}(f)$: vezměte do úvahy, jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce na intervalech, které tvoří její definiční obor, a dále uplatněte svoji znalost o spojitém obrazu intervalu. Nezapomeňte, že někdy se nabývá největší a nejmenší hodnota v krajních bodech intervalu, i když tam funkce nemá nulovou derivaci.

Graf

- Při náčrtku grafu pomůže studium asymptot funkce v $\pm\infty$. Připomeňme, že pokud existují vlastní limity $a := \lim_{x\to+\infty} f(x)/x$ a $b := \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$, je přímka $ax + b$ asymptotou funkce f v $+\infty$, tedy $f(x) \approx ax + b$ pro $x \to +\infty$. Podobně v $-\infty$. Uvědomte si, že limitu pro a je možno zkusit počítat L'Hospitalem: $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$, pokud limita vpravo existuje. Ale to už možná víte z doby, kdy jste počítali jednostranné limity derivací.
- Pomůže i představa o hodnotách funkce ve význačných bodech. Není to nutné, ale pomůže to. Nebojte se vynést si do grafu všechny rozumné body na grafu funkce, zejména ty, kde se $f(x)$ dobře počítá. Pomáhají i průsečíky s osami x a y. Stejně tak pomůže, když si v některých bodech spočtete i hodnotu derivace. Získáte tím představu o tečně ke grafu funkce v tom kterém bodě.
- Všechny získané informace zachyťte do náčrtku grafu funkce a jste hotovi.

M.Rokyta, 5.1.2005, opravy 14.1.2005