Pomocí právě ověřeného pozorování již důkaz tvrzení snadno dokončíme. Položíme $\varepsilon_k = \frac{\delta}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, a induktivně nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ splňující $a_{n_k} \in (c - \varepsilon_k, c + \varepsilon_k)$. V prvním kroku indukce nalezneme pomocí pozorování použitého pro $k = 1$ index $n_1 > 1$ takový, že $a_{n_1} \in (c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1)$. Máme-li nyní již nalezena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in (c - \varepsilon_j, c + \varepsilon_j)$ pro $j \in \{1, \dots, k\}$, použijeme pozorování pro přirozené číslo $n_k$ k nalezení indexu $n_{k+1} > n_k$ takového, že $a_{n_{k+1}} \in (c - \varepsilon_{k+1}, c + \varepsilon_{k+1})$.

Tím jsme nalezli posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}$, která konverguje k $c$, jelikož

$$\lim_{k\to\infty} \left|a_{n_k} - c\right| \le \lim_{k\to\infty} 2\varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta}{2^{k-1}} = 0.$$

Tedy $c \in H(\{a_n\})$ a důkaz tvrzení je dokončen. ♣

**2.5.5. Příklad.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Ukažte, že platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

*Řešení.* Nejprve dokážeme první nerovnost. Označme $B = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pokud $B = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme nyní $B > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $B > K > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

z definice liminf

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} > K.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Z Věty 2.4.13 dostaneme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.50 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} K \left(K^{-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K.$$

2 policajti

Podle Věty 2.4.11 tedy také platí

$$\liminf_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K,$$

takže celkem dostáváme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge K.$$

Díky volbě $K$ odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq B.$$

Tím je dokázána první nerovnost. Druhá nerovnost platí podle 2.4.10. Zbývá provést důkaz třetí nerovnosti. Označme $A = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom $A \in \mathbb{R}^*$, $A \geq 0$. Pokud $A = \infty$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.22}$$

Z Věty 2.4.13 dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.50 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (A+\varepsilon)\left((A+\varepsilon)^{-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A + \varepsilon.$$

Podle Věty 2.4.11 tedy také platí

$$\limsup_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A + \varepsilon,$$

a tedy celkem dostáváme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon.$$

Díky volbě $\varepsilon$ odtud plyne, že $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A$. Tím je dokázána třetí nerovnost. ♣

**2.5.6. Příklad.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti nezáporných reálných čísel. Předpokládejme, že výrazy $\liminf a_n \cdot \liminf b_n$, $\liminf a_n \cdot \limsup b_n$ a $\limsup a_n \cdot \limsup b_n$ jsou definovány. Dokažte, že potom platí

$$\begin{aligned}\liminf a_n \cdot \liminf b_n &\leq \liminf (a_n b_n) \leq \liminf a_n \cdot \limsup b_n \\ &\leq \limsup (a_n b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n.\end{aligned}$$

*Řešení.* Označme $a = \liminf a_n$, $b = \liminf b_n$, $A = \limsup a_n$ a $B = \limsup b_n$. Potom $a, b, A, B \in \mathbb{R}^*$ a $a, b, A, B \geq 0$.

Dokážeme první ze čtyř nerovností. Jestliže $a = 0$ nebo $b = 0$, pak nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $a, b$ jsou nenulová a zvolme $z \in \mathbb{R}$, $0 < z < ab$. Potom existují $a', b' \in \mathbb{R}$ taková, že $a' < a$, $b' < b$ a

# Convergence of Ratio Test implies Convergence of the Root Test

In Elias Stein and Rami Shakarchi's *Complex Analysis* textbook, we have the following exercise:

> Show that if $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence of complex numbers such that
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L,$$
>
> then
>
> $$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=L.$$

I've been trying to prove this with no luck. The only thing I've thought of doing is

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a_{n+1}|^n}{|a_n|^n}\right)^{1/n},$$

but this hasn't lead me anywhere except dead ends. Will someone provide a hint for me about how to proceed? Thanks!

Minor update: I don't know if it's helpful yet, but I know we can write the limit as

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a_{n+1}a_n\cdots a_0|}{|a_n\cdots a_0|}\cdot\frac{1}{|a_n|}\right).$$

This reminds me a lot of the geometric mean, which even has the exponents I'm trying to get...

(sequences-and-series) (convergence)

edited Jan 27 '13 at 7:19

asked Jan 27 '13 at 7:09
Clayton
14k 2 16 60

As I recall, you divide the $a_n$ into two parts: a final part in which the ratio is within $\epsilon$ of L and an initial part which, because its length is bounded, can be shown to not affect the result. There are a lot of limit-type results which are proved this way. – marty cohen Jan 27 '13 at 7:24

@martycohen: Do you mean something like $|L-|a_{N+1}/a_N||<\epsilon$? I'm not sure I follow what you mean by dividing $a_n$ into two parts if that isn't what you mean. – Clayton Jan 27 '13 at 7:29

Which question is this? Which number/chapter? – leo May 1 '13 at 2:15

1 @leo: Chapter 1, Exercise 17. – Clayton May 1 '13 at 2:20

See also: math.stackexchange.com/questions/69386/... – Martin Sleziak May 2 '14 at 15:15

## 1 Answer

By definition of limit, for each $\varepsilon > 0$ there exists $N$ s.t.

$$n > N \implies \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - L\right| < \varepsilon.$$

So

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdots \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}|a_N| < (L+\varepsilon)^{n-N}|a_N|$$

Take the $n$th root of both sides of the inequality. Then we get

$$\sqrt[n]{|a_n|} < (L+\varepsilon)^{1-N/n}\sqrt[n]{|a_N|}.$$

Taking $n \to \infty$ then

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le L + \varepsilon.$$

Since $\varepsilon$ is arbitrary, we get $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le L$. Likewise we can get $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge L$.

edited Oct 1 '15 at 10:44

answered Jan 27 '13 at 8:17

Hanul Jeon
13k 4 18 68

That is excellent! Thanks! – Clayton Jan 27 '13 at 16:04

**1.6.21. Definice.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}, \\ (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}, \\ (a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}, \\ (-\infty,\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pak množiny $(a,b)$, $(-\infty,b)$, $(a,\infty)$ a $(-\infty,\infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a,b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,b]$ a $[a,\infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

**1.6.22. Poznámka.** Poznamenejme, že prázdná množina je intervalem, neboť $(a,a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je intervalem, neboť $[a,a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je intervalem, stačí ověřit podmínku ze znění lemmatu, která říká, že množina s každými dvěma svými body $x$ a $y$ obsahuje i všechny body mezi $x$ a $y$. Není tedy třeba hledat příslušné krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazu Věty 4.3.6.

**1.6.23. Lemma.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina $M$ je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M\ \forall z \in \mathbb{R}: (x < z < y \Rightarrow z \in M). \tag{1.11}$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$, které uvedou příslušné části důkazu.

*Důkaz Lemmatu 1.6.23.* $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $M = (a,b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pro ověření podmínky (1.11) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.11) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina $M$ splňuje (1.11). Pokud $M = \emptyset$, pak je tvrzení zřejmé. Není-li $M$ omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak existuje $x \in M$, $x < z$ (neboť $M$ není zdola omezená) a také existuje $y \in M$, $y > z$ (protože $M$ není shora omezená). Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li $M$ omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M$,

$y > z$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť $g$ je dolní závorou $M$ a $G$ je horní závorou $M$. Množina $M$ je tedy interval s krajními body $g$ a $G$, přičemž každý z nich může (ale nemusí) patřit do $M$.

V ostatních případech, kdy je $M$ omezená pouze zdola a kdy je $M$ omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ∎

**1.6.24. Věta.** Nechť $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$. Pak $m \geq n + 1$.

*Důkaz.* Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m-n$ je přirozené číslo, a proto $m-n \geq 1$. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

**1.6.25. Věta** (existence celé části). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

*Důkaz.* Nejprve sporem dokážeme jednoznačnost čísla $k$ s uvedenými vlastnostmi. Nechť existují $k, j \in \mathbb{Z}$ taková, že $k \neq j$, $k \leq x < k + 1$ a $j \leq x < j + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $j > x - 1$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $k - j > 0$, plyne z Věty 1.6.24, že $k - j \geq 1$. To je spor s tím, že $k - j < 1$. Dokázali jsme tedy, že existuje nejvýše jedno číslo s uvedenými vlastnostmi.

Nyní dokážeme, že pro dané $x \in \mathbb{R}$ příslušné číslo existuje. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. Číslo $x$ je horní závorou množiny $M$, a proto je $M$ shora omezená. Ukážeme, že $M$ je neprázdná. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí, že $n > x$, a proto je množina $\mathbb{Z}$ zdola omezená. Množina $\mathbb{Z}$ je neprázdná, a tak existuje infimum $g \in \mathbb{R}$ množiny $\mathbb{Z}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ máme $n \geq g$. Je-li $n \in \mathbb{Z}$, pak i $n - 1 \in \mathbb{Z}$, a proto $n - 1 \geq g$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ potom platí $n \geq g + 1$. Prvek $g + 1$ je tedy dolní závorou množiny $\mathbb{Z}$, což je spor s tím, že $g = \inf \mathbb{Z}$. Množina $M$ je tudíž neprázdná.

Existuje tedy supremum $G \in \mathbb{R}$ množiny $M$. Potom existuje $k \in M$ takové, že $G - 1 < k$. Pak platí $k + 1 > G$, a tedy $k + 1 \notin M$. Odtud a z faktu $k \in M$ plyne $k \leq x < k + 1$. ∎

**1.6.26. Definice.** Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k + 1$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.6.25), nazýváme **celou částí** čísla $x$ a značíme jej $[x]$.

**1.6.27. Věta** (Archimédova[4] vlastnost $\mathbb{R}$). Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

*Důkaz.* Nechť $x \in \mathbb{R}$. Nyní stačí položit $n = \max\{[x] + 1, 1\}$. ∎

[4]Archimédés (287 př. n. l. - 212 př. n. l.)

Z následující věty vyplývá, že pro každou množinu existuje množina, která je „větší" ve smyslu Definice 1.7.1.

**1.7.7. Věta** (Cantorova věta). Nechť $X$ je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.

*Důkaz.* Zobrazení $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny $X$ a $\mathcal{P}(X)$ nemají stejnou mohutnost. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X;\ x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení $\varphi$ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny $A$ platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny $A$ platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce $\varphi$ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. ∎

**1.7.8. Definice.** Nechť $A$ je množina. Řekneme, že množina $A$ je

- **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X$ má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$,
- **nekonečná**, pokud není konečná,
- **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$,
- **nespočetná**, pokud není spočetná.

**1.7.9. Lemma.** Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ právě tehdy, když $m = n$.

*Důkaz.* Pokud $m = n$, potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ podle Věty 1.7.4(a).

Opačnou implikaci dokážeme pomocí matematické indukce podle $m$. Předpokládejme, že $m = 1$ a $\{1\} \approx \{1, \dots, n\}$. Potom existuje bijekce $\varphi\colon \{1\} \to \{1, \dots, n\}$. Platí tedy $\varphi(1) = 1 = n$, a tedy $m = n$.

Předpokládejme platnost tvrzení pro $m \in \mathbb{N}$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m+1\}$. Existuje tedy bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, m+1\} \to \{1, \dots, n\}$. Pak existuje jednoznačně určené číslo $k_0 \in \{1, \dots, m+1\}$ takové, že $\varphi(k_0) = n$. Definujme pomocné zobrazení $\psi\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n-1\}$ předpisem

$$\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{pokud } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0\}, \\ \varphi(m+1), & \text{pokud } k = k_0 \text{ a } k_0 \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Zobrazení $\psi$ je dobře definované s hodnotami v množině $\{1, \dots, n-1\}$. Ověřme, že jde o bijekci množiny $\{1, \dots, m\}$ na množinu $\{1, \dots, n-1\}$. Zobrazení je „na", neboť obor hodnot obsahuje všechny prvky množiny $\{1, \dots, n\} \setminus \{\varphi(k_0)\} = \{1, \dots, n-1\}$. Předpokládejme nyní, že $\psi(k) = \psi(k')$ pro $k, k' \in \{1, \dots, m\}$. Pokud $k = k_0$, pak $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ a $\psi(k) = \psi(k_0) =$

$\varphi(m+1)$. Díky prostotě $\varphi$ platí $k' = k_0 = k$. Pokud $k \neq k_0$, pak díky prostotě $\varphi$ musí být $k' \neq k_0$. Potom ale platí $\psi(k) = \varphi(k) = \varphi(k') = \psi(k')$. Odtud plyne $k = k'$. Zobrazení $\psi$ je tedy prosté.

Máme tedy $\{1, \dots, n-1\} \approx \{1, \dots, m\}$. Podle indukčního předpokladu dostáváme $n - 1 = m$, a tedy $n = m + 1$. ∎

**1.7.10.** Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto $n$ určeno podle Lemmatu 1.7.9 jednoznačně. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

**1.7.11. Definice.** Pokud je množina $X$ prázdná, pak říkáme, že **počet prvků** množiny $X$ je roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že **počet prvků** množiny $X$ je roven $n$. Počet prvků konečné množiny $X$ značíme $|X|$.

**1.7.12. Poznámka.** S pomocí Věty 1.7.4 dostáváme, že dvě konečné množiny $X, Y$ mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

**1.7.13. Věta.** Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je množina $A$ omezená. Je-li navíc $A$ neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

*Důkaz.* Je-li $A$ prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny $A$.

Nechť je $A$ neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li $A$ jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o $n$ prvcích. Nechť $A$ je množina o $n+1$ prvcích, tj. existuje bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, n+1\} \to A$. Položme $B = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má $n$ prvků, a tedy je dle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum $G'$ a minimum $g'$. Položme

$$g = \min\{\varphi(n+1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n+1), G'\}.$$

Čísla $g$ a $G$ jsou dobře definovaná dle Příkladu 1.6.19. Dále platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}\colon g \leq \varphi(i) \leq G.$$

Tedy $g$ je dolní závora množiny $A$ a $G$ je horní závora množiny $A$. Proto je množina $A$ omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1, \dots, n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Nalezli jsme tedy minimum i maximum množiny $A$. Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ∎

**1.7.14. Věta.** Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

*Důkaz.* Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že množina $\mathbb{N}$ je konečná. Podle Věty 1.7.13 je potom množina $\mathbb{N}$ omezená, a tedy existuje její horní závora v $\mathbb{R}$, kterou označíme $K$. Potom podle Archimédovy vlastnosti