

9. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kytaristka@gmail.com

Fakta

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Hinty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad - nutná podmínka konvergence

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad - limitní srovnávací kritérium

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + 2n}{n^2 + 2n^3}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^2 + 1}$$

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad - Cauchyho kritérium

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$$

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad - d'Alambertovo kritérium

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

5. Vyšetřete konvergenci následujících řad - Leibnizovo kritérium

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{3} - 1)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

6. Vyšetřete konvergenci následujících řad - limitní srovnávací kritérium (příklady s funkcemi)

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+4}{n(n-1)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$$

Zkouškové příklady

7. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n) \arctan(n^3 - 5n + 6)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n} - \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^8+3n} - \sqrt{n^8+1}}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \arcsin \frac{1}{n} \quad (f) \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)} \right)$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} \right)^{n^{3/2}} \quad (g) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$$

$$(h) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{e} - 1) (\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1})$$

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}} \quad (j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$$