

11. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kytaristka@gmail.com

Příklady

Najděte primitivní funkce k následujícím funkcím na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

1. $f(x) = \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)}$

Řešení:

Rozkladem na parciální zlomky můžeme postupovat následovně: hledáme koeficienty A, B tak, aby

$$\frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5}$$

Přemnožením této rovnice $(x - 2)(x + 5)$ dostaneme rovnost

$$2x + 3 = A(x + 5) + B(x - 2)$$

Rovnost platí pro každé x . Dosazením $x = 2$ dostaneme, že $7 = 7A + 0$, a tedy $A = 1$. Dosazením $x = -5$ dostaneme, že $-7 = -7B$, a tedy $B = 1$. Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx = \int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{1}{x + 5} dx \stackrel{C}{=} \ln|x - 2| + \ln|x + 5|$$

Výsledky jsou totožné (podle pravidla o součtu logaritmů).

2. $f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}$

Řešení:

Platí, že

$$\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{(x^4 + 5x^2 + 4) - 5x^2 - 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A + Bx}{x^2 + 1} + \frac{C + Dx}{x^2 + 4}$$

zde ale postačí hledat jej ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{C}{x^2 + 4}$$

Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno x v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto x^2 budeme psát t .

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{C}{t + 4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za t lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů A, B . Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t + 4 = A(t + 4) + C(t + 1)$$

Dosazením $t = -4$ a $t = -1$ dostaneme, že¹

$$-16 = -3C \implies C = \frac{16}{3}$$

$$-1 = 3A \implies A = -\frac{1}{3}$$

Odtud tedy máme, že

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{t + 1} + \frac{16}{3} \frac{1}{t + 4}$$

a tedy

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{16}{3} \frac{1}{x^2 + 4}$$

Nyní už můžeme provést integraci.

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \int \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{(x/2)^2 + 1} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ \stackrel{C}{=} x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1/2} \arctan \frac{x}{2} = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2}$$

3. $f(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}$

Řešení:

Protože stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, není potřeba zlomek před rozkladem na parciální zlomky upravovat.

¹) Poznamenejme, že zde hledáme rozklad platný pro **všechna** t reálná. Pokud by někdo namítl, že $t = x^2$ a není tedy možné dosazovat záporná čísla, pak na tuto námítku odpovíme, že pokud najdeme obecnější rovnost platnou pro **všechna** reálná čísla, pak jistě platí i pro všechna nezáporná reálná čísla — která již lze psát ve tvaru druhé mocniny x .

Nejprve najděme rozklad jmenovatele. Uhodneme, že číslo 1 je kořenem polynomu $x^3 - 3x + 2$. Potom platí, že

$$(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

a tedy platí, že

$$(x^3 - 3x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)$$

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{x}{(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Přenosobním jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = -2$ dostaneme, že

$$1 = 3A \implies A = \frac{1}{3}$$

$$-2 = 9C \implies C = -\frac{2}{9}$$

Nakonec třeba dosazením $x = 0$ dostaneme, že

$$0 = 2A - 2B + C \implies B = A + \frac{C}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Odtud vyplývá, že platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} dx &= \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{9} \frac{1}{x + 2} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{3} \frac{1}{(x - 1)} + \frac{2}{9} \ln|x - 1| - \frac{2}{9} \ln|x + 2| = -\frac{1}{3(x - 1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| \end{aligned}$$

4. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2}$

Řešení:

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Přenosobním jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 + 3x - 2 = A(x^2 + x + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + x + 1)(x - 1) + (Dx + E)(x - 1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2 + 3x - 2 = A - C - E + 2Ax - Bx - Dx + Ex + 3Ax^2 + Dx^2 + 2Ax^3 + Cx^3 + Ax^4 + Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9}, B = -\frac{2}{9}, C = -\frac{4}{9}, D = \frac{1}{3}, E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \frac{x+2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{3} \frac{x+8}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x-1| \\ -\frac{2}{9} \int \frac{x+2}{x^2 + x + 1} dx &= -\frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+8}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)^2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx \stackrel{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]$ a substitucí $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$.)

$$\stackrel{C}{=} \frac{5}{6} \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \frac{5x+2}{x^2 + x + 1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}$$

5. $f(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2$

Řešení:

Nejprve najdeme rozklad jmenovatele. Platí, že

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Hledáme tedy rozklad výrazu

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Ten je potřeba obecně hledat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-2)(x-1)^2$$

Dosažením $x = 1$ a $x = 2$ dostaneme, že

$$1 = A, \quad 4 = C$$

Zbylé koeficienty B, D určíme dosažením dvou libovolných hodnot, třeba $x = 0$ a $x = 3$. Dostaneme, že

$$0 = 4A - 4B + C - 2D = 4 - 4B + 4 - 2D \implies -8 = -4B - 2D$$

$$9 = A + 2B + 4C + 4D = 1 + 2B + 16 + 4D \implies -8 = 2B + 4D$$

Odtud snadno vyplývá, že $D = -4$ a $B = 4$. Odtud vyplývá:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 &= \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} \right) \frac{C}{C} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x-1} + 4 \ln|x-1| - \frac{4}{x-2} - 4 \ln|x-2| = -\frac{x-2+4(x-1)}{(x-1)(x-2)} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| = \\ &\quad -\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| \end{aligned}$$

6. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}$

Řešení:

Jmenovatel je kvadratický trojčlen v x^2 . Podle Viětových vztahů platí, že

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$$

Hledáme rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme, že

$$\begin{aligned}x^2 + 5x + 4 &= (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\x^2 + 5x + 4 &= Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Cx^2 + Cx + D\end{aligned}$$

Odtud máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}A + C &= 0 \\B + D &= 1 \\4A + C &= 5 \\4B + D &= 4\end{aligned}$$

která má řešení

$$A = \frac{5}{3}, \quad B = 1, \quad C = -\frac{5}{3}, \quad D = 0$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\frac{5}{3}x + 1}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2 + 4}$$

po roztržení prvního zlomku na dva a vhodném rozšíření dostaneme

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{5}{6} \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{1 + x^2} - \frac{5}{6} \frac{2x}{x^2 + 4}$$

Odtud vyplývá, že (integrál z prvního a třetího zlomku řešíme třeba substitucí t = jmenovatel příslušného zlomku)

$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \stackrel{C}{=} \frac{5}{6} \ln(1 + x^2) + \arctan x - \frac{5}{6} \ln(4 + x^2)$$

7. $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$

Řešení:

Platí, že

$$(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5) = (x - 2)^2(x^2 - 4x + 5)$$

přičemž druhý kvadratický trojčlen je nerozložitelný (nemá reálné kořeny). Hledáme tedy rozklad ve tvaru

$$\frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4x + 5}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x - 2)(x^2 - 4x + 5) + B(x^2 - 4x + 5) + (Cx + D)(x - 2)^2,$$

odkud dosazením $x = 2$ dostaneme, že $B = 1$. Roznásobením v předchozím vztahu a porovnáním koeficientů na levé a pravé straně

$$1 = A(x - 2)(x^2 - 4x + 5) + (x^2 - 4x + 5) + (Cx + D)(x - 2)^2$$

$1 = 5 - 10A + 4D - 4x + 13Ax + 4Cx - 4Dx + x^2 - 6Ax^2 - 4Cx^2 + Dx^2 + Ax^3 + Cx^3$
dostaneme soustavu rovnic

$$1 = 5 - 10A + 4D$$

$$0 = -4 + 13A + 4C - 4D$$

$$0 = 1 - 6A + 4C + D$$

$$0 = A + C$$

Ta má řešení $A = 0$, $C = 0$, $D = -1$. Odtud máme, že hledaný rozklad má tvar

$$\frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} dx &= \int \frac{1}{(x - 2)^2} dx - \int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx = \\ &= -\frac{1}{x - 2} - \int \frac{1}{1 + (x - 2)^2} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{x - 2} - \arctan(x - 2) \end{aligned}$$

8. $f(x) = \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

Řešení: Kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ nemá reálné kořeny. Proto rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme, že $A = 1$. Dosazením $x = -1$ dostaneme, že $B = -1$. Po dosazení a roznásobení dostaneme

$$1 = (1+x)(1+x+x^2) - x(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

$$1 = 1 + x + x^2 + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2 + Dx$$

odkud vyplývá, že $D = -1$ a $C = 0$. Rozklad má tvar

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Integraci dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} dx &\stackrel{C}{=} \ln|x| - \ln|1+x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

9. $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

Řešení:

Platí, že $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)((x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$. Druhý kvadratický trojčlen tedy nemá reálné kořeny, rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

dosazením $x = -1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Roznásobením pak dostaneme

$$1 = \frac{1}{3}(x^2-x+1) + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

odkud ihned vyplývá, že $C = \frac{2}{3}$ (porovnání koeficientů absolutních členů) a $B = -\frac{1}{3}$ (porovnání koeficientů u druhé mocniny x). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x+1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x-2}{x^2-x+1} dx - \int \frac{1}{3} \frac{1}{x^2-x+1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odkud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$10. f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$$

Řešení:

Platí, že $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, přičemž druhý člen již nemá reálné kořeny. Rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

dosazením $x = 1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Zpětným dosazením a roznásobením dostaneme, že

$$x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

odkud vyplývá, že $C = \frac{1}{3}$ (absolutní členy) a $B = -\frac{1}{3}$ (koeficienty u x^2). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} dx - \int \frac{1}{3} \frac{2}{x^2 + x + 1} dx - \frac{C}{6} \\ &= \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odtud vyplývá:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

$$11. f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$$

Řešení:

Polynom $x^4 + x^2 + 1$ zjevně nemá žádné reálné kořeny, lze jej tedy rozložit na součin dvou ireducibilních kvadratických trojčlenů. Hledejme tento rozklad ve tvaru

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + Px + Q)(x^2 + Rx + S)$$

Roznásobením pravé strany dostaneme

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + Rx^3 + Sx^2 + Px^3 + PRx^2 + PSx + Qx^2 + RQx + SQ$$

Odtud máme soustavu rovnic

$$SQ = 1, RQ + PS = 0, S + Q + PR = 1, R + P = 0$$

Z poslední rovnice plyne, že $R = -P$, z druhé potom plyne, že $RQ = RS$ a tedy $Q = S$. Dosazením do zbylých dvou dostaneme, že $S^2 = 1$ a $2S + R^2 = 1$, odkud plyne, že $S = Q = 1$ a $R = -P = \pm 1$. Tím dostáváme rozklad

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Rozklad na parciální zlomky tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$$

roznásobením levé strany máme

$$1 = B + D + Ax - Bx + Cx + Dx - Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + Dx^2 + Ax^3 + Cx^3$$

a odtud dostáváme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= B + D \\ 0 &= A - B + C + D \\ 0 &= -A + B + C + D \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

která má řešení

$$A = B = D = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \frac{x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Dalším rozkladem na tvar

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{4} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

a následnou integrací dostaneme, že

$$\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$$