

## 5. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>  
kytaristka@gmail.com

### Teorie

**Věta 1** (Záměna řady a integrálu). Nechť  $D \in \mathbb{S}$  a  $g_j, j = 1, 2, \dots$  jsou měřitelné funkce na  $D$ . Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

- (a)  $g_j = aq^j$ , kde  $a, q$  jsou měřitelné funkce,  $|q| < 1$ , a  $\int_D \frac{a}{1-q} d\mu$  konverguje (geometrická řada),
- (b)  $\sum_j \int_D |g_j| d\mu < \infty$ ,
- (c)  $\int_D \sum_j |g_j| d\mu < \infty$ ,
- (d)  $g_j = (-1)^j h_j$ ,  $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq 0$ ,  $h_j \rightarrow 0$ ,  $h_1$  je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada  $\sum_j g_j$  konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j d\mu = \sum_j \int_D g_j d\mu,$$

**Věta 2** (Leviho pro řady). Nechť  $D \in S$  a  $g_j, j = 1, 2, \dots$  jsou nezáporné měřitelné funkce na  $D$ . Potom

$$\int_D \sum_j g_j = \sum_j \int_D g_j$$

**Věta 3** (Lebesgueova věta pro řady). Nechť  $D \in S$  a  $g_j, j = 1, 2, \dots$  jsou měřitelné funkce na  $D$ . Nechť řada  $\sum_j g_j$  konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce  $g$  (takzvaná majoranta) tak, že

$$\left| \sum_{j=1}^k g_j(x) \right| \leq g(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D \sum_j g_j d\mu = \sum_j \int_D g_j d\mu.$$

### Hinty

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n = n!$$

## Příklady

### 1. Spočtěte

(a)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

(c)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + 1} dx$$

(d)

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx$$

(e)

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

(f)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$$

$$p, q > 0$$

(g)

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}$$

(h)

$$\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 2 \ln 2$$

(i)

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

(j)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

(k)

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

$$|b| < a$$

2. Následující diagram popisuje vztahy mezi jednotlivými typy integrálů. Určete, která z množin znázorňuje riemannovsky, newtonovsky a lebesgueovsky integrovatelné funkce a spojité funkce.

