

3. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kunck6am@natur.cuni.cz

Algoritmus

1. Zkontrolujeme, že rovnice je se separovatelnými proměnnými.
2. Převědeme všechna y na jednu stranu (k y') a všechna x na druhou. (Kontrolujeme podmínky.)
3. Přepíšeme y' na dy/dx .
4. Zintegrujeme obě strany.
5. Vyjádříme y .
6. Určíme definiční obor y , zkontrolujeme všechny podmínky.
7. Jsou-li, aplikujeme počáteční podmínky.
8. (Uděláme zkoušku.)

Hint

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cos x \, dx$$

Příklady

1. Ověřte, že funkce $y(x)$ je řešením diferenciální rovnice $y = xy' - (y')^2$:
 - (a) $y(x) = x - 1$
 - (b) $y(x) = 2x - 4$
 - (c) $y(x) = -3x - 9$
2. Najděte řešení diferenciálních rovnic
 - (a) $y' = 2x$, $y(1) = 2$, načrtněte integrální křivky
 - (b) $y' = 1/(x - 2)$, načrtněte
 - (c) $y' = \frac{-2}{x^3}$, $y(0) = 2$
3. Najděte řešení diferenciálních rovnic
 - (a) $y'/y^2 = e^x$, $y(0) = \frac{1}{2}$
 - (b) $y^2 y' = x - 2$
 - (c) $y'/y = 4x$, $y(0) = 3$
 - (d) $y' = 4xy$
 - (e) $y'/y = 1/(x - 1)$, načrtněte
 - (f) $y^2 y' = \cos x$, $y(0) = -2$
 - (g) $e^y y' = 1$
 - (h) $xy' - y = 0$
 - (i) $y'/y = 2/x$, načrtněte
 - (j) $xy' - y/(x + 1) = 0$ (použijte parciální zlomky)
 - (k) $xy' + y + y^2 = 0$
 - (l) $y'/(y + 1) = \cot x$, načrtněte

4. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' = -y \cot x$

(e) $x^2 y' - y^2 = 1$

(b) $(x - 1)y' = -y^2, y(2) = -1$

(f) $2xyy' = x + 2$

(c) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

(g) $(xy^2 + x) + (y - x^2y)y' = 0$

(d) $y' \sin x = y \cos x$

(h) $(x + 1)y' = -xy$

5. Příklady ze starších písemek.

(a) $y' = xe^x y, y(1) = 1$

(b) $y' = xy(y + 2)$

(c) $y'(1 + x^2) = (1 + y^2)$

(d) $y' = \sin x \sin y, y(0) = \frac{\pi}{2}$

6. Je nalezena zkamenělá kost, u které se podařilo určit, že obsahuje 0.1% hmotnosti C-14, než kterou obsahovala původně. Určete stáří fosilie, víte-li, že poločas rozpadu C-14 je 5730 let.

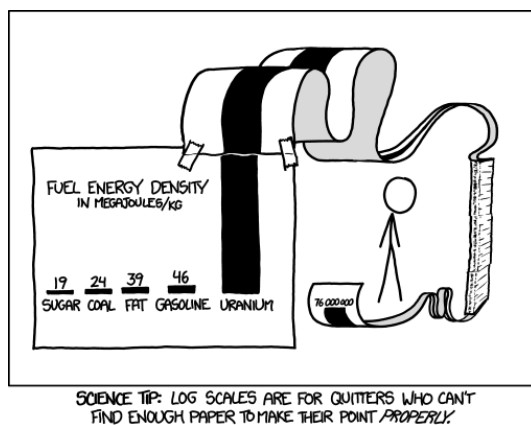


Figure 1: <https://www.xkcd.com/1162/>

7. Do uzavřeného školního kampusu o 1000 studentech přijel jeden z nich s chřipkou. Předpokládejme, že rychlost šíření infekce závisí jak na množství již nakažených studentů, tak na množství dosud zdravých. Určete množství studentů nakažených 6. den pokud víte, že po čtyřech dnech bylo nakaženo již 50 studentů. (Odpovídající diferenciální rovnice: $y' = ky(1000 - y), y(0) = 1, y(4) = 50.$)