

## 10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

### Teorie

**Definice 1.** *Lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t), \quad (1)$$

kde  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  a  $f$  je funkce spojitá na daném intervalu  $(a, b)$ .

*Homogenní rovnici* příslušnou k rovnici (1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0. \quad (2)$$

**Poznámka 2.** Maximální řešení rovnice (2) jsou definována na celém  $\mathbb{R}$ .

**Definice 3.** *Charakteristickým polynomem* rovnice (2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

**Věta 4** (tvar fundamentálního systému). Nechť  $\chi$  je charakteristický polynom rovnice (2). Nechť  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu  $\chi$  s násobnostmi  $r_1, \dots, r_s$ . Nechť  $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$  jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu  $\chi$  s kladnou imaginární částí a násobnostmi  $q_1, \dots, q_l$ , kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$ . Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\ e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & te^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, \\ e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & te^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & te^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, \\ e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & te^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t \end{array}$$

**Věta 5** (speciální pravá strana). Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  a  $P, Q$  jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$y_p(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde  $R, S$  jsou polynomy stupně ne většího než  $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$  a  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  udává, jakou násobnost má číslo  $\mu + i\nu$  jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

## Algoritmus

1. Vyřešíme homogenní rovnici:
  - (a) Napíšeme charakteristický polynom a najdeme kořeny.
  - (b) Sestavíme řešení.
2. Zkontrolujeme, že pravá strana je ve vhodném tvaru, případně jestli není třeba součtem vhodných tvarů.
3. Použijeme Větu o Speciální pravé straně a odhadneme tvar řešení (s několika neznámými koeficienty).
4. Dosadíme do nehomogenní rovnice a dopočteme koeficienty.
5. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

## Příklady

1. Přiřaďte funkce ke tvaru  $e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx))$ :

(1) $12x^2 + 2x + 1$	(A) $e^{0x}((3x - 1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
(2) $3x - 1$	(B) $e^{0x}((12x^2 + 2x + 1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
(3) $8xe^x$	(C) $e^{2x}((-2)\cos 1x + 0\sin 1x)$
(4) $-2e^{2x}\cos x$	(D) $e^{1x}((8x)\cos 0x + 0\sin 1x)$
2. Najděte řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou
  - (a)  $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$
  - (b)  $y'' - 3y' = 3x - 1$
  - (c)  $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$
  - (d)  $y'' + y = x + \sin x$
  - (e)  $y'' - 4y' + 5y = -2e^{2x}\cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0$
3. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y''' + y'' + y' + y = 8xe^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$	(d) $y''' - 4y'' + 4y' = 2x + e^{2x} - \cos 2x$
(b) $y^{iv} + 8y'' + 16y = 64x\sin 2x$	(e) $y''' + y'' - y' - y = 4\cos x$
(c) $y''' - y' + 4y = xe^{-2x}$	(f) $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = 100x^2 - 64e^{3x}$

4. V jakém tvaru budete hledat řešení?

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| (1) $y''' + y'' + y = e^x$             | (A) $e^x$                             |
| (2) $y''' + y'' - 2y = (x + 1)e^x$     | (B) $Ae^x$                            |
| (3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$   | (C) $(Ax + B)e^x$                     |
| (4) $y''' + y'' = x^3 + x^2$           | (D) $x(Ax + B)e^x$                    |
| (5) $y'' + y' + y = e^x \cos x$        | (E) $x^2(Ax + B)e^x$                  |
| (6) $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$   | (F) $Ae^{-x}$                         |
| (7) $y''' - 2y'' + 5y' = 2e^x \sin 2x$ | (G) $Ax^3e^{-x}$                      |
|  | (H) $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$    |
|  | (I) $Ax^3 + Bx^2$                     |
|  | (J) $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$            |
|  | (K) $x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$       |
|  | (L) $(x^2 + x)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ |
|  | (M) $e^x(A \cos x)$                   |
|  | (N) $e^x(A \cos x + B \sin x)$        |
|  | (O) $x(A \cos x + B \sin x)$          |
|  | (P) $A \cos x + B \sin x$             |
|  | (Q) $xe^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$     |
|  | (R) $e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$      |

### Zkouškové příklady

5. Najděte řešení diferenciálních rovnic

- |  |   |
|--|---|
| (a) $y^{(4)} - y = x^2$                  | (d) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x \sin x$        |
| (b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$ |   |
| (c) $y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x$       | (e) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = \sin x + x \cos x$ |

### Bonus

6. Najděte řešení ODR

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| (a) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(0) = 1$  | (c) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$           |
| (b) $y'' = -y, y(0) = 2, y'(0) = -3$ | (d) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ |

7. V závislosti na parametru  $r \in \mathbb{R}$  najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + ry = 0.$$

8. V závislosti na konstantách  $p, q > 0$  najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + 2py' + q^2y = 0.$$

9. Proč se malé dítě na pružinové houpačce (zvířátko na pružině) houpe rychleji než dospělý? Pohyb je popsán rovnicí  $my'' + ky = 0$ , kde  $m$  je hmotnost houpajícího se člověka a  $k$  charakterizuje pružinu.

