3/ při použití Lebesgueovy věty bývá výhodné položit

$g(x) = \sup_{n \in N} |f_n(x)|$ (kde N je množina přir. čísel)

pro každé $x \in M$. V tomto případě zvolíme $x \in M$ pevné a hledáme $\sup |f_n(x)|$ přes množinu všech přirozených čísel (anebo alespoň pro všechna $n \geqq n_0$, kde n_0 je pevné přirozené číslo). Jak postupovat v tomto případě ukážeme na příkladech.

POZOR ! - při vyšetřování stejnoměrné konvergence hledáme

$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$, kdežto při použití Lebesgueovy věty hledáme $\sup_{n \in N} |f_n(x)|$!

4,2. Ukažte, že $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,dx = 0$!

1/ Pro každé $n \in N$ existuje integrál jako Riemannův i Newtonův, ukažte, že $\int_0^1 x^n n^{-1}\,dx = \frac{1}{n\,(n+1)}$, odkud plyne tvrzení.

2/ Využijte též odhadu $0 \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{1}{n}\,dx \leqq \frac{1}{n}$.

3/ Použijte větu 20 :

a/ limitní funkce $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n} = 0$ pro každé $x \in (0,1)$,

b/ $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ na intervalu $(0,1)$ (zřejmě $0 \leqq \frac{x^n}{n} \leqq \frac{1}{n}$)

tedy $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n}\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$.

(Jako cvičení ukažte, že $\sigma_n = \frac{1}{n}$!).

4/ Použijte Leviho větu:

a/ $\frac{x^n}{n} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $n \in N$ (proč ? ! ,

b/ $\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{x^n}{n}$ pro každé $x \in (0,1)$ a každé $n \in N$.

Dokažte poslední nerovnost přímo anebo použitím tvrzení, že pro libovolné $x \in (0,1)$ je funkce $\varphi(z) = \frac{x^z}{z}$ jakožto funkce z klesající v intervalu $(1, +\infty)$.

5/ Použijte Lebesgueovu větu:

Hledáme funkci g tak, aby $g \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a byla splněna nerovnost $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqq g(x)$ pro všechna $n \in N$ a všechna $x \in (0,1)$, stačí zřejmě položit $g = 1$ na intervalu $(0,1)$.

Zkusme spočítat $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n}$ pro $x \in (0,1)$

(tím vlastně dostaneme nejlepší odhad), je vidět, že $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n} = x$ pro $x \in (0,1)$, stačí tedy položit v Lebesgueově větě $g(x) = x$ na $(0,1)$. ||

4,3. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = 0$!

1/ Ukažte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu $0 \leqq \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = \int_0^{1/n} \frac{nx\, dx}{1+n^2x^2} + \int_{1/n}^1 \frac{nx\, dx}{1+n^2x^2} \leqq$

$$\leqq \int_0^{1/n} nx\, dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{nx}\, dx = \frac{1}{2n} + \frac{\log n}{n}$$

3/ Zkoumejte, zda $\frac{nx}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $(0,1)$

(nekonvergují stejnoměrně, neboť

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ 0 ;\ \frac{n}{1+n^2} ;\ \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2})$$

4/ Použijte Lebesgueovu větu.

Z předchozího odstavce vyplývá, že

$$x \in (0,1)\ ,\quad n \in N \Rightarrow 0 \leqq \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqq \frac{1}{2}$$

stačí tedy položit $g = \frac{1}{2}$ na intervalu $(0,1)$ a ověřit podrobně předpoklady Lebesgueovy věty,

dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = 0 .$$

Jako cvičení se pokusme nalézt "lepší" odhad, položme

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{pro každé } x \in (0,1).$$

Zvolme tedy pevně $x \in (0,1)$, místo abychom počítali

$\sup_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2}$, položme pro každé $n \in \langle 1,+\infty)$ (a každé $x \in (0,1)$

$$H_x(n) = \frac{nx}{1+n^2x^2} .$$

Zde tedy považujeme n za "spojitě" proměnnou a hledejme

$$G(x) = \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

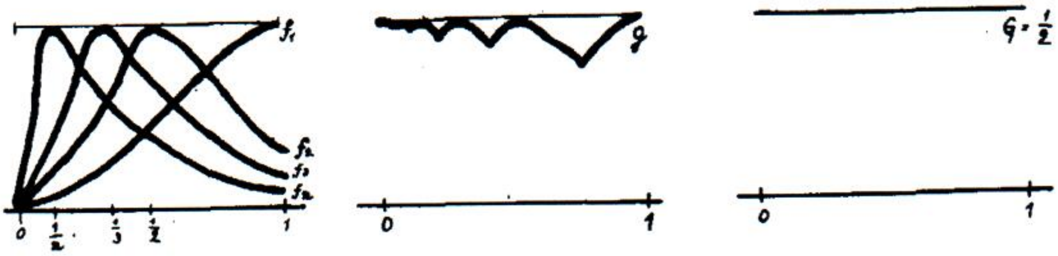
Odůvodněte, proč $g(x) \leqq G(x)$ pro každé $x \in (0,1)$!

Opět zjistěte, že

$$\sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ \frac{x}{1+x^2} ;\ 0 ;\ \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} .$$

Žádný "lepší" odhad jsme tedy neobdrželi. Uvědomte si, že funkce G není "nejlepším" odhadem, je to způsobeno tím, že místo abychom vyšetřovali supremum přes množinu všech přirozených čísel N , vyšetřovali jsme vlastně supremum přes množinu všech reálných čísel v intervalu $\langle 1, +\infty)$ (podrobně rozmyslete !). Kdyby tedy vyšlo $\int_0^1 G =$ $= +\infty$, stále by mohlo být $\int_0^1 g < +\infty$.

Viz následující obrázek:



Obrázek č.4

5/ Ukažte, že nelze přímo použít Leviho větu .

4,4.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}\,.\,x}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ověřte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu

$$0 \leqq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2}\,dx \leqq n^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{1/n} x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{n^2x}\,dx \right) =$$

$$= n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{\log n}{n} \right) .$$

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně k nule v intervalu (0,1) jest

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} = \max\left\{ 0 ; \frac{\sqrt{n^3}}{1+n^2} ; \frac{\sqrt{n}}{2} \right\} .$$

4/ Ukažte, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty, jest

$$\sup_{n\in N} \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} \leqq \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} = \max\left\{ \frac{x}{1+x^2} ; 0 ; \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{x}} \right\} =$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4.\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

4,5.	Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$

fix $x \in (0,1)$

$$g_x(n) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad n \in [1,\infty)$$

max/sup $g_x(n) = ?$

$$g_x'(n) = \frac{x(1+n^2x^2) - nx(2nx^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$x + n^2x^3 - 2n^2x^3 = 0$$

$$n^2(x^2 - 2x^2) = -1$$

$$n_0^2 = \frac{1}{x^2} \qquad n_0 = \frac{1}{x} \qquad (\forall \text{ je kladné})$$

pak $$g(n_0) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x}{1+\frac{1}{x^2}\cdot x^2} = \frac{1}{2}$$

kde mohou být maxima? $$\frac{x}{1+x^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2} \qquad \begin{aligned} 2x &\leq 1+x^2 \\ 0 &\leq (1-x)^2 \ \checkmark \end{aligned}$$

$n=1$: $\frac{x}{1+x^2}$

n_0 : $\frac{1}{2}$ $\qquad \Big\}\quad \sup g_x(n) = \frac{1}{2}$

lim $n \to \infty$: 0

Lebesgue s majorantou $g(x) = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{x^n}{1+x^{2n}}}_{f_n \geq 0} dx$$

Levi:

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \ldots \quad ?$$

$$f_n \overset{?}{\leq} f_{n+1}$$

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \overset{?}{\leq} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}$$

$$1+x^{2n+2} \not\leq x + x^{2n+1} \qquad \text{není pravda}$$

<u>Lebesgue</u> z derivování nic nevyjde, majoranta tedy musí být v krajích:

např. $n=1$ $\quad \dfrac{x}{1+x^2} \overset{*}{\geq} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

to ale není naší integrovatelná majoranta

tak zkusím - od $n=2$

$$\frac{x^2}{1+x^4} \geq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \qquad n \geq 2$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$

1/ Ukažte, že $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$,

ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1-}\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1-}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq 1$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu . jiný Levi !

4,6. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$!

1/ Využijte odhadu

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx + \int_1^\infty x^{-n}\,dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2}, \text{ tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geq 2$,

potom $\sup\limits_{n\geq 2}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu! ! jiný Levi

4,7. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = 1$!

1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N \;;\; x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

$$n \geqq 2 \,,\; x \in (1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leqq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\tfrac{x}{n})^j\right]^{-1} \leqq \left[\tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)\,\frac{x^2}{n^2}\right]^{-1} \leqq \frac{4}{x^2} .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu .

4,8. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos x\, dx = 0$!

1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0,+\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\, dx = 0$.

Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A) \,,\; n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} .$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \to f \quad \text{na } M \Rightarrow \int_M f_n \to \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$?

$\Vert$ 1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N \; ; \quad x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \; ,$$

$$n \geq 2 \; , \quad x \in (1, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \Big[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\frac{x}{n})^j \Big]^{-1} \leq \Big[\frac{1}{2} n (n-1) \frac{x^2}{n^2} \Big]^{-1} \leq \frac{4}{x^2} \; .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu . $\Vert$

4,8. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \,dx = 0$!

$\Vert$ 1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0, +\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ $\Vert$.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,dx = 0$.

$\Vert$ Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A) \; , \; n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} \; . \Vert$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na} \quad M \Rightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

$\boxed{4{,}10.}$ Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1 \rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1 \rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1 \rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1 \rangle$?

Podle Leviho věty (provádějte vše podrobně !) jest

$$\lim_{\alpha\to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha-\sin x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(1-\sin x)} \quad \text{a}$$

poslední integrál je roven $-\infty$. ||

Lze v tomto příkladě též užít Lebesgueovu větu?

4,20. Ukažte, že $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = 0$ pro libovolné $a \in E_1$!

|| Zvolte posloupnost k_n, $k_n > 0$, $k_n \nearrow +\infty$. Ukažte, že posloupnost funkcí $e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}$ není monotonní v intervalu $(0,+\infty)$, nelze tedy užít přímo Leviho větu.

Zřejmě však platí

$$\left| e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| \leqq e^{-k_1 x} \frac{|\sin ax|}{x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

tedy Lebesgueova věta dává

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-k_n x} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0 .$$

Příklady tohoto druhu však nemusíme vždy řešit automaticky pomocí Leviho či Lebesgueovy věty, leckdy můžeme postupovat přímo.

Ke příkladu, položíme-li $C(a) = \max\limits_{x\in(0,+\infty)} \frac{|\sin ax|}{x}$ pro $a \in E_1$,

jest

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx \right| \leqq \int_0^{\infty} \left| e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| dx \leqq C(a) \int_0^{\infty} e^{-kx}\, dx = \frac{C(a)}{k} ,$$

odkud snadno plyne naše tvrzení . ||

4,21. Dokažte, že $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx = 0$!

|| 1/ Ukažte, že $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha \in \langle 0,+\infty)$.

2/ použijte Lebesgueovu i Leviho větu ,

3/ využijte též odhadu

$$0 \leqq \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx \leqq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \quad . ||$$

4,22. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n}\, dx = 1$!

|| 1/ Použijte Lebesgueovu větu a vztahu

$$n \geqq 1,\ x \in (0,+\infty) \Longrightarrow e^{-x^n} \leqq \phi(x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

Podle Leviho věty (provádějte vše podrobně !) jest

$$\lim_{\alpha\to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha - \sin x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(1-\sin x)} \quad \text{a}$$

poslední integrál je roven $-\infty$. ||

Lze v tomto příkladě též užít Lebesgueovu větu?

4,20. Ukažte, že $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = 0$ pro libovolné $a \in E_1$!

|| Zvolte posloupnost k_n, $k_n > 0$, $k_n \nearrow +\infty$. Ukažte, že posloupnost funkcí $e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}$ není monotonní v intervalu $(0,+\infty)$, nelze tedy užít přímo Leviho větu.

Zřejmě však platí

$$\left| e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| \leqq e^{-k_1 x} \frac{|\sin ax|}{x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

tedy Lebesgueova věta dává

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-k_n x} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} 0\, dx = 0 .$$

Příklady tohoto druhu však nemusíme vždy řešit automaticky pomocí Leviho či Lebesgueovy věty, leckdy můžeme postupovat přímo.

Ke příkladu, položíme-li $C(a) = \max\limits_{x\in(0,+\infty)} \frac{|\sin ax|}{x}$ pro $a \in E_1$,

jest

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx \right| \leqq \int_0^{\infty} \left| e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| dx \leqq C(a) \int_0^{\infty} e^{-kx}\, dx = \frac{C(a)}{k} ,$$

odkud snadno plyne naše tvrzení . ||

4,21. Dokažte, že $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx = 0$!

|| 1/ Ukažte, že $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha \in \langle 0,+\infty)$.

2/ použijte Lebesgueovu i Leviho větu ,

3/ využijte též odhadu

$$0 \leqq \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx \leqq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \quad . ||$$

4,22. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n}\, dx = 1$!

|| 1/ Použijte Lebesgueovu větu a vztahu

$$n \geqq 1,\ x \in (0,+\infty) \Longrightarrow e^{-x^n} \leqq \phi(x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

kde $\phi(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $\phi(x) = e^{-x}$ pro $x \in (1,+\infty)$,

2/ použijte Leviho větu - tuto nemůžete použít přímo na celý interval $(0,+\infty)$, ale lehko ji lze aplikovat zvláště na intervaly $(0,1)$ a $(1,+\infty)$, zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-x^n}\,dx = 1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-x^n}\,dx = 0 \ .$$

4,23. Řešte následující příklady .

1/ Zkoumejte, zda lze provést limitní přechod za integračním znamením v následujících příkladech (tj. zkoumejte, zda platí

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \ ) \ :$$

a/ $f_n(x) = 1$ pro $x \in (n,+\infty)$, $f_n(x) = 0$ jinde v E_1 , $M = E_1$,

b/ $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $M = \langle 0,1 \rangle$,

c/ $f_n(x) = n\,x^{-nx^2}$, $M = (0,1)$,

d/ $f_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$, $M = (0,1)$, $(1,+\infty)$, $(0,+\infty)$

2/ Spočítejte následující limity:

a/ $\lim_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx$, $\lim_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \cos x\,dx$,

b/ $\lim_{a\to 0_+} \int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$,

c/ $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$,

$x > 1$

$$e^{-x^n} = \frac{1}{e^{x^n}} \quad \text{pak} \quad e^{-x} \geq e^{-x^2} \geq \dots$$

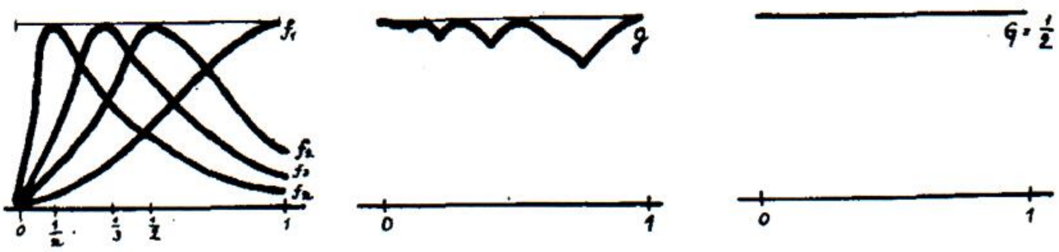
našli smo majoranto

$x < 1$

$$\frac{1}{e^{x}} \leq \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^{x^3}} \leq \dots \quad \text{levi}$$

šetřovali supremum přes množinu všech přirozených čísel N , vyšetřovali jsme vlastně supremum přes množinu všech reálných čísel v intervalu $\langle 1, +\infty)$ (podrobně rozmyslete !). Kdyby tedy vyšlo $\int_0^1 G = +\infty$, stále by mohlo být $\int_0^1 g < +\infty$.

Viz následující obrázek:



Obrázek č.4

5/ Ukažte, že nelze přímo použít Leviho větu .

4,4.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}\cdot x}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ověřte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu

$$0 \le n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2}\,dx \le n^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{1/n} x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{n^2x}\,dx \right) =$$

$$= n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{\log n}{n} \right) .$$

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně k nule v intervalu $(0,1)$ jest

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max \left\{ 0 ;\ \frac{\sqrt{n^3}}{1+n^2} ;\ \frac{\sqrt{n}}{2} \right\} .$$

4/ Ukažte, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty, jest

$$\sup_{n\in N} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} \le \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max \left\{ \frac{x}{1+x^2} ;\ 0;\ \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{x}} \right\} =$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\cdot\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

4,5.	Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$

$$g(n) = \frac{n^{3/2}\, x}{1+n^2x^2} = x \cdot \frac{n^{3/2}}{1+n^2x^2} \qquad n \in [1, \infty)$$

$$g'(n) = \frac{\frac{3}{2} n^{1/2}(1+n^2x^2) - n\, n^{1/2} \cdot 2n x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$\frac{3}{2}(1+n^2x^2) - 2n^2x^2 = 0$$

$$\frac{3}{2} + n^2\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x^2\right) = 0$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} n^2 x^2$$

$$\frac{3}{x^2} = n_0^2 \qquad (x > 0)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{x} = n_0$$

paz $$g(n_0) = \frac{x \cdot 3^{3/4}}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{1+3} = \underline{\underline{\frac{3^{3/4}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

majoranta: $$\max \left\{ \frac{x}{1+x^2} ; 0 ; \underbrace{\frac{3^{3/4}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}_{\max} \right\}$$

$$\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}$$

$$2x \le 1+x^2 \ \checkmark$$

$$\frac{3^{3/4}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{1}{2}$$

$$3^{3/4} \ge 2\sqrt{x} \ \checkmark$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}}$

1/ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \underline{1}$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N\ ;\quad x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

$$n \geq 2\ ,\quad x \in (1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^j\right]^{-1} \leq \left[\frac{1}{2}\, n\, (n-1)\, \frac{x^2}{n^2}\right]^{-1} \leq \frac{4}{x^2} .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu .

4,8. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x\,dx = 0$!

1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0,+\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N\ ,\ x \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1+x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,dx = 0$.

Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A)\ ,\quad n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} .$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \to f \quad \text{na} \quad M \Rightarrow \int_M f_n \to \int_M f .$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int\limits_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$?

JPE, May 1998. Let $A \subset [0,1]$ be a non-measurable set. Let $B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in A\}$.
(a) Is B a Lebesgue measurable subset of $\mathbb{R}^2$?
(b) Can B be a closed subset of $\mathbb{R}^2$ for some such A?

(a) Yes. The set B is a subset of a straight line ($y = 0$), so it has outer measure zero. Thus it is Lebesgue measurable.

(b) No. If B was closed in $\mathbb{R}^2$, then A would be closed in $[0,1]$, and then it would be measurable.

JPE, Sept 1997. For a measurable subset $E \subset \mathbb{R}^n$, prove or disprove:
(a) If E has Lebesgue measure zero, then its closure has Lebesgue measure zero.
(b) If the closure of E has Lebesgue measure zero, then E has Lebesgue measure zero.

(a) False. Example: E consists of points with all rational coordinates. E is countable, hence $m(E) = 0$. On the other hand, E is dense in $\mathbb{R}^n$, hence its closure is $\mathbb{R}^n$.

(b) True. Since E is a subset of its own closure, then E also has Lebesgue measure zero.

JPE, May 1993. Let r_n be an enumeration of rational numbers in $\mathbb{R}$.
(a) Show that $\mathbb{R} \setminus \cup_{n=1}^{\infty}(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})$ is never empty.
(b) Show that $\mathbb{R} \setminus \cup_{n=1}^{\infty}(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n})$ can be empty or non-empty, depending on how the rationals are enumerated.

(a) By the σ-subadditivity of the Lebesgue measure

$$m\big(\cup_{n=1}^{\infty}(r_n - \tfrac{1}{n^2}, r_n + \tfrac{1}{n^2})\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} m\big((r_n - \tfrac{1}{n^2}, r_n + \tfrac{1}{n^2})\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{n^2} < \infty,$$

thus these intervals cannot cover the entire $\mathbb{R}$.

(b) Now the above estimate gives $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty$, thus our previous argument would not work. However presenting specific examples of enumeration so that the above intervals cover (or do not cover) $\mathbb{R}$ is not easy. Let us not get into these complications...

JPE, May 1990. Does there exist a measure space $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ such that there is no countable collection of subsets $X_n \in \mathfrak{M}$ satisfying $\mu(X_n) < \infty$ for all n and $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Yes. Example: μ is the counting measure on $\mathbb{R}$ with Borel σ-algebra.

JPE, May 1989. Does there exist an open dense subset $A \subset [0,1] \times [0,1]$ such that its complement $([0,1] \times [0,1]) \setminus A$ has positive Lebesgue measure?