V2012

6a $$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}}\, dx \qquad \alpha \in (-1,\infty)$$

Nadále

$$F'(\alpha) \overset{?}{=} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}}\, dx = \int_0^\infty \frac{-e^{-\alpha x^2}\cdot(-x^2)}{x e^{x^2}}\, dx$$

$$= \int_0^\infty x\, e^{-x^2(\alpha+1)}\, dx = \left[\frac{e^{-x^2(\alpha+1)}}{-2(\alpha+1)}\right]_{x=0}^{x=\infty} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2(\alpha+1)}}}$$

Odtud $\quad F(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(\alpha+1) + c$

neb $\quad F(0) = \int_0^\infty 0\, dx = 0 \quad$ je

$$0 = \frac{1}{2}\ln(1) + c \quad \to \quad c = 0$$

celkem $\quad F(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(\alpha+1)$

Důkaz

(De-1) pro s.v. $x \in (0,\infty)$ je $f(\cdot, x)$ dif. podle α na $\alpha \in (-1,\infty)$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = x e^{-x^2(\alpha+1)} \quad ✓$$

(De-2) $\forall \alpha \in (-1,\infty)$ je $f(\alpha,\cdot)$ spoj na $(0,\infty)$ → tedy měř. ✓

(De-4) $\exists\, \alpha_0 \in (-1,\infty)$: $f(\alpha_0,\cdot)$ je integr. → Ano $\alpha_0 = 0$

(De-3) majoranta pro $x e^{-x^2(\alpha+1)}$

volme $\alpha \in [p,\infty)$ $p > -1$. Pak je majoranta

$$x e^{-x^2(p+1)} =: g(x) \quad ✓$$

Uvědomíme-li si konečně, že F je lichá funkce, dostáváme

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx = \operatorname{sign} a . \frac{\pi}{2} . \log(1+|a|), \quad a \in E_1 .$$

6,20. Dokažte, že $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\, dx = \operatorname{sign} a . \frac{\pi}{2} . \log(1+|a|)$ pro $a \in E_1$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$, označte jej $F(a)$.

2/ Použijte výsledku cvičení 6,19 a substituce $\operatorname{tg} x = t$.

3/ Ukažte, že F je funkce lichá.

4/ Ověřte, že jsou splněny předpoklady věty 61 – $M = (0,+\infty)$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Nejdůležitější je opět nalezení konvergentní majoranty:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle 0,+\infty)} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

Odtud plyne, že

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

Ukažte, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} . \frac{1}{1+a} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

(nutno rozlišit případy $a = 0$, $a = 1$ anebo ukázat, že $F'(a)$ je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ obojí proveďte podrobně!). Odtud vzhledem k podmínce $F(0) = 0$ a vzhledem k lichosti F dostáváme tvrzení.

(66)

6,21. Zkoumejte $K(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{x e^x}\, dx$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$, pro $a \in (-\infty,-1\rangle$ je $K(a) = -\infty$.

2/ Ověřte předpoklady věty 61 ($M = (0,+\infty)$, $A = (-1,+\infty)$) – položíme-li

$$G(x) = \sup_{a \in A} \left| \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1-e^{-ax}}{x e^x}\right) \right| \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty),$$

je

$$G(x) = \sup_{a \in (-1,+\infty)} e^{-(a+1)x} = 1 \quad \text{pro každé } x \in (0,+\infty)$$

a tedy $G \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{\alpha x}}{x e^x}\,dx \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

6b

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro } x \in (0,+\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro } a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna } a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro } a \in (-1, +\infty).$$

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\,dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a, k.
Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$

(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax\,dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

6

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

a b

0

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^{\infty} -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\text{, konvergentní majoranta je}$$

$G(x) = xe^{-px^2}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)$, protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}\,.$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \frac{1}{1-p}\,,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\,.$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi\arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} \quad \text{pro } a > 0 , \quad b,c \in E_1 .$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

(6d) 6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom kdopak, $b>0$ $a>0$

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy - vzhledem k $F(b,b) = 0$ - jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro } a > 0 , \quad b \geq 0 .$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Symetrie

Toto tvrzení dokažte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

(6e) 6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \, dx$!

Pro $\beta \in (0, \infty)$ pevné,

chceme ukázat, že $\quad F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\, dx$

je spoj. pro $\alpha \in [0, \infty)$. (zajímavé nejsou pro $0+$).

(Sp-3)
$$\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \leq g(x)$$

$x \geq 1$
$$\left| \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2}$$

$x < 1$
$$\left| \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \right| \leq \frac{1 - e^{-\beta x^2}}{x^2} \quad \text{majoranta}$$

Sp-2, Sp-1 - D. cvičení

[Majoranta $e^{-(p+1)x^2}$, $p \in (-1, \infty)$,

6e

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1, +\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1, +\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a+1}}\,, \quad \text{tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty)\,.$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?), k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0, +\infty)$, $A = \langle -1, 0 \rangle$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \leq \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$]

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^\infty (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}})\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a, b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \geq 0$, $b \geq 0$.

c/ Buď tedy $b \geq 0$ pevné, $a \in (0, +\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$

(majoranta – pro $a \in \langle p, q \rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ – určíme podle následujícího odhadu – proveďte !

$$\left| -\frac{2a}{x^2}\, e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \leq \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál – př. 5,84 – dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi}\,,$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a) \quad \text{pro} \quad b \geq 0\,, \ a > 0\,.$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b-a)$ pro všechna $a, b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e.

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a\to 0_+} K(a,b) = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{\pi}{b}\cdot\log(b+a) + C(b)\right] = \frac{\pi}{b}\cdot\log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2+x^2}\,dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b}\log b$, tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|}\cdot\log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a,b\in E_1,\ b\neq 0 .$$ ||

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot\cos bx - e^{-\alpha x}\cdot\cos\beta x}{x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a>0$, $\alpha>0$, $b,\beta\in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p>0$),

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-ax}).

Odtud plyne, že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(\alpha,\beta) \quad \text{a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a>0,\ \alpha>0,\ b,\beta\in E_1 .$$ ||

(6) ! **6,44.** Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a>0$, $b>0$ či $a<0$, $b<0$.

b/ Předpokládejme, že $b>0$ je pevné, buď $a\in(0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2x^2}$ pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p>0$).

$(\operatorname{arctan} y)' = \frac{1}{1+y^2}$

6R

Vzhledem k podmínce $J(b,b) = 0$ je

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b} \quad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b > 0 \,.$$

c/ Jaký je výsledek pro $a < 0$, $b < 0$?

d/ Porovnejte též s příkladem 5,71. ||

6,45.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$!

a/ Integrál konverguje pro každé $a \in E_1$, $b \in E_1$.

b/ Buď $a \in E_1$, potom funkce $H^{a,*}(b)$ je spojitá v E_1 (pro $b \in \langle -p,+p \rangle$ kde $p > 0$ je

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \right| \leq \frac{|\operatorname{arctg} ax| \,.\, |\operatorname{arctg} px|}{x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Big)$$

c/ Obdobně funkce $H^{*,b}(a)$ je spojitá v E_1 pro každé $b \in E_1$.

d/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)} \, dx$$

(majoranta $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+p^2x^2)} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$).

Je nutno nyní spočítat tento integrál.

1/ Podle příkladu 6,20 je

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \quad \text{pro} \quad \alpha > 0 \,,$$

provedeme-li tedy v našem integrálu substituci $ax = t$, bude

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a}$$

2/ Kdybychom neznali výsledek příkladu 6,20, byli bychom nuceni postupovat stejně jako v 6,20, dostali bychom vlastně, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

a odtud vzhledem k podmínce $\frac{\partial H}{\partial a}(a,0) = 0$ by bylo

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b \geq 0 \,.$$

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.
Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p, +\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0, +\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\, dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).
Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty).$$

69

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a, k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.
Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leqq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$
(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).
Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax\, dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).
Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

6g

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?).
Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$\boxed{F(0,k) = 0 \ , \quad \text{tj.} \quad C(k) = 0 \ .}$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) = - e^{-kx} \cdot \sin ax \ .$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left| e^{-kx} \sin ax \right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px} \ , \quad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a) \ ,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a. Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$.
Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim\limits_{k \to +\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k \to \infty} F(a,k) = \lim_{k \to \infty} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a) \ .$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim\limits_{k \to \infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Tedy $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi. ||

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\, dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je!

|| 1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

Note that

$$0 \leq \int_X (f - g_n)\, d\mu \leq \int_X (h_n - g_n)\, d\mu \leq \frac{1}{n}.$$

Thus taking the limit $n \to \infty$ proves the last claim of the problem.

JPE, May 1990. Does there exist a sequence of functions $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ that converges uniformly to zero on every compact set, but $\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = 1$ for all n?

Yes, Example: $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.

JPE, May 1990. Let f be a non-negative function defined on $\mathbb{R}$. Assume that for all $n \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x)\, dm \leq 1.$$

Show that $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $\|f\|_1 \leq 1$.

Note that for each $x \in \mathbb{R}$, the sequence $\frac{n^2}{n^2+x^2}$ monotonically increases and converges to 1, as $n \to \infty$. Thus the integrand $\frac{n^2}{n^2+x^2} f(x)$ monotonically increases (in n) and converges to $f(x)$ as $n \to \infty$. By the Lebesgue Monotone Convergence

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x)\, dm \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dm = \|f\|_1.$$

JPE, Sept 1989. Let f_n be a sequence of continuous functions Lebesgue integrable on $[0, \infty)$ which converges uniformly to a function f Lebesgue integrable on $[0, \infty)$. Is it true that

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

False. Example: we set $f(x) \equiv 0$ and define f_n by $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}$ for $x \in (0, n)$ and $f(x) = 0$ for $x \geq n$. Then $\int_0^\infty |f(x) - f_n(x)|\, dx = \frac{1}{2}$ for all n.

5 Lebesgue integral: "equipartitions"

Note: in all the problems of this section the function f must be real-valued, even though this assumption is NOT made explicitly in any of them, for some reason.

JPE, May 2011. Let $f \in L^1(-\infty, \infty)$. Let $\{a_n\}$ be a sequence of strictly positive numbers, i.e., $a_n > 0$ for any n, such that $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$. Prove that there exists a partition of $\mathbb{R}$ into measurable sets $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ such that $\int_{E_n} f\, dm = a_m \int_{\mathbb{R}} f\, dm$ for all n.

Není to pravda.

Let C be the Cantor set, and let Cn be the closed set left after n steps of removing middle thirds from [0,1], so Cn is a disjoint union of $2n$ closed intervals, and the sum of the lengths of these intervals is $(23)n$, which converges to zero. The characteristic function χCn of Cn is a step function that dominates the characteristic function of C, so its integral, $(23)n$, is an upper Riemann sum for χC. Thus the infimum of the upper Riemann sums for χC is at most $\inf n(23)n=0$. The lower Riemann sums are all greater than or equal to 0, so this shows that the Riemann integral exists and equals 0.

(https://math.stackexchange.com/questions/18474/riemann-integral-of-characteristic-function-of-cantor-set)

(1) $F(\alpha) = \int_0^\pi \underbrace{\frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x}}_{f(\alpha,x)} dx \qquad \alpha \in (0,\infty)$

- konverguje vůbec?

  $0 < \sin x < 1$ neboť $x \in (0,\pi)$

  tedy $1 + \alpha \sin x > 1$ → ln je dobře definován

  a pak $f(\alpha,x) \geq 0$

  v 0: $\frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x} \approx \frac{\alpha \sin x}{x} \approx \alpha$

  v π: jde spojitě do 0

- ~~$\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$ → půjde asi do ∞, použijeme Fatou lemma~~

  ~~→ více na 8. cvičení~~

- $\lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha) \underset{\text{na dluh}}{=} \int_0^\pi \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x} dx$

  $= \int_0^\pi \frac{0}{x} dx = 0$

(Li-1) $\forall x$ $x \in (0,\pi)$ $\lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x} = 0$

lim F.

(Li-2) fixujme α. Pak funkce $\frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x}$

(jako funkce x) je spojitá → tedy měřitelná pro $x \in (0,\pi)$

(Li-3) majoranta, bude stačit pro $\alpha \in (0,1]$

pak $\frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{známe}}}{\leq} \frac{\alpha \sin x}{x} \leq \alpha \leq 1$ je majoranta na $[0,\pi]$

Dluh splacen.

a/ $g_1(x) = \frac{|\cos x|}{x^q} + \frac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\frac{1}{x^p}, \frac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^q}$.

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0,+\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) , \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1,+\infty) , \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0,+\infty)$ pro $s \in \langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}(x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1,+\infty) . \end{cases}$

(α) 6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\, dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

. Sp-1 a Sp-2 promyslet

(2)

2/ F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,1)$,

konvergentní majoranty:

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \dfrac{x^{q-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ x^{q-2} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_3(x) = x^{p-1} + x^{q-2} \qquad \text{apod.}$$

6,12. Dokažte, že

a/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$,

b/ $F(a) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\,dx$ -"- v $(-1,+\infty)$,

c/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\,dx$ -"- v $(-\infty,2)$,

d/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ -"- $(-1,+\infty)$,

e/ $F(a) = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{|\log x|^a}$ -"- $(-\infty,1)$,

f/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-ax}\,dx$ -"- $(0,+\infty)$,

g/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \log(x^2+a^2)\,dx$ -"- $(0,+\infty)$.

6,13. Uvažujeme $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty a\, e^{-a^2x}\,dx$.

1/ Dokažte, že integrál konverguje pro každé $a \in E_1$

2/ Dokažte, že F je funkce lichá.

3/ Dokažte, že F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Vezměte libovolný interval $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$, potom zřejmě

(3)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2}\,dx$$

$\alpha \in (-\infty, \infty)$

(1) $f(\cdot, x)$, $x \in (0,\infty)$ je spoj. v (α) (složení spoj. fcí)

(2) $\forall \alpha \in (-\infty,\infty)$ je fce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná (dodefinujeme)

(3) majoranta

pro $[-p, p]$

$$g(x) = \frac{\ln(1+p^2x^2)}{x^2},$$

a/ $g_1(x) = \dfrac{|\cos x|}{x^q} + \dfrac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \dfrac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\dfrac{1}{x^p}, \dfrac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \dfrac{1}{x^p} + \dfrac{1}{x^q}$.

(4)

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\,dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0, +\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$.

$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} = \infty$

Majoranta $g(x) = \sup_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1), \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1, +\infty), \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ pro $s \in \langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}(x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1, +\infty) . \end{cases}$

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \dfrac{x^{b-1}}{1+x}\,dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

3/ $F(a) = \int_0^1 x^a \, dx$ je spojitá funkce v $(-1,+\infty)$,

4/ $F(n) = \int_1^\infty x^n \, dx$ je spojitá funkce v $(-\infty,-1)$,

5/ $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \, dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$.

6,8. Dokažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{2+x^a}$ je spojitá funkce v intervalu $(2,+\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a \in (2,+\infty)$, viz př. 3,44-10.

2/ Ukažte, že F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,+\infty)$, kde $p > 2$.

Položíte-li $g(x) = \sup\limits_{a \in \langle p,+\infty)} \frac{x}{2+x^a}$ pro $x \in (0,+\infty)$

je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \frac{x}{2+x^p} & \text{pro } x \in \langle 1,+\infty) . \end{cases}$$

(Promyslete a odůvodněte!)

Protože $\frac{x}{2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a $\frac{x}{2+x^p} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ je

$g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (opět odůvodněte!) a jsou splněny předpoklady věty 60.

(5)

6,9. Ukažte, že funkce $I(a) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^a} \, dx$ je spojitá v intervalu $(1,+\infty)$.

1/ Ukažte, že pro $a \in (1,+\infty)$ integrál konverguje.

2/ Ukažte, že funkce I je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$,

majoranta $g(x) = \sup\limits_{a \in \langle p,q\rangle} \left| \frac{\cos x}{x^a} \right| = \begin{cases} \frac{|\cos x|}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{|\cos x|}{x^p} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$

snadno nahlédnete, že $g \in \mathcal{L}_{(\frac{1}{2},+\infty)}$

3/ Jako cvičení ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $\frac{\cos x}{x^a}$ na intervalu $(\frac{1}{2},+\infty)$ pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$: