

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \arctg \frac{b}{a} - \arctg \frac{c}{a} \quad \text{pro } a > 0, b,c \in E_1.$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22. ||

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} dx$!

Obdobu př. 6,33, $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0, b,c \in E_1$. ||

(1a) 6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Bud $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom $b > 0 \quad a > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = - \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{x^2} dx = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{viz př. 5,84}),$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$),
tedy - vzhledem k $F(b,b) = 0$ - jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro } a > 0, b \geq 0.$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0, b \geq 0$.

Toto tvrzení dokážte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $(0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0, b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0, b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie.
Vše podrobně provedte!

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a. ||

6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} dx$!

Pro $B \in (0, \infty)$ persone,

chicene uraželi je $F(\alpha, B) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-Bx^2}}{x^2} dx$

je spaj pro $\alpha \in [0, \infty)$. (začímaž nulte na $0+$).

(Sp-3)

$$\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-Bx^2}}{x^2} < g(x)$$

staci pro male $x < \beta$

$x \geq 1$

$$\left| \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-Bx^2}}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2}$$

$x < 1$

$$\left| \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-Bx^2}}{x^2} \right| \leq \frac{1 - e^{-Bx^2}}{x^2} \quad \text{majračta}$$

Sp-2, Sp-1 - D. uniceur

(4)

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\underline{a = b}$ anebo $\underline{a > 0}$,

$$\underline{b > 0}.$$

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -xe^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}, \text{ konvergentní majoranta je}$$

$$|G(x)| = xe^{-px^2} \text{ pro } x \in (0, +\infty), a \in (p, +\infty), p > 0.$$

Tedy

$$F(a,b) = -\frac{1}{2} \log a + C(b), \text{ protože } F(b,b) = 0,$$

$$\text{je } C(b) = \frac{1}{2} \log b, \text{ tj. } F(a,b) = \log \frac{b}{a}.$$

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1, +1)$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0, \pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1, +1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos x}.$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in (-p, +p)$ a pro $x \in (0, \pi)$ platí

$$\left| \frac{1}{1+\cos x} \right| = \frac{1}{|1+\cos x|} \leq \frac{1}{1-|\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \frac{1}{1-p},$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0, \pi)$.

Pomocí substituce $t = \tan \frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \quad \text{pro } a \in (-1, +1).$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro všechna $a \in (-1, +1)$,

stačí ukažat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $(-1, +1)$ (proč?).

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \arctg \frac{b}{a} - \arctg \frac{c}{a} \quad \text{pro } a > 0, b,c \in E_1.$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22. ||

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} dx$!

Obdoba př. 6,33, $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0, b,c \in E_1$. ||

6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Bud $b \geq 0$ pevné, $a \in (0, +\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = - \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{viz př. 5,84}),$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in (p, +\infty)$, kde $p > 0$),

tedy - vzhledem k $F(b,b) = 0$ - jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro } a > 0, b \geq 0.$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0, b \geq 0$.

Toto tvrzení dokážte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $(0, +\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0, b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0, b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie.
Vše podrobně provedte!

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a. ||

(1c) 6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} dx$!

(1c)

$$\left[\text{Majoranta} \quad e^{-(p+1)x^2}, \quad p \in (-1, \infty) \right]$$

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1, +\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1, +\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a+1}}, \quad \text{tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi} (\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro } a \in (-1, +\infty).$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?), k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0, +\infty)$, $A = (-1, 0)$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \leq \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0, +\infty)}$$

6,37. Spočtěte $K(a, b) = \int_0^\infty (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}) dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a, b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a, b)$ je sudá funkce jak v proměnné a' , tak v b' , omezíme se na $a \geq 0, b \geq 0$.

c/ Buď tedy $b \geq 0$ pevná, $a \in (0, +\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a, b) =$
 $= \int_0^\infty -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}} dx$

(majoranta - pro $a \in (p, q)$, kde $0 < p < q < +\infty$ - určíme podle následujícího odhadu - proveděte!)

$$\left| -\frac{2a}{x^2} e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \leq \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0, +\infty)}$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál - př. 5,84 - dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a, b) = -\sqrt{\pi},$$

tedy vzhledem k $K(b, b) = 0$ vyjde

$$K(a, b) = \sqrt{\pi}(b - a) \quad \text{pro } b \geq 0, a > 0.$$

d/ Ukažte, že $K(a, b) = \sqrt{\pi}(b - a)$ pro všechna $a, b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e. ||

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladu na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty \rangle \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$\boxed{G(x) = \sup_{a \in (p, +\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro } x \in (0, +\infty),}$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0, +\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 ještě

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x} dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro } a \in (p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty \rangle$ byl libovolný interval s $p > -1$, ještě

$$\boxed{K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna } a \in (-1, +\infty)}$$

(rozmyalete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$\boxed{K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro } a \in (-1, +\infty).}$$

(1d)

$$6,22. \text{ Buď } F(a, k) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx$$

$$\text{Potom } F(a, k) = \arctg \frac{a}{k} \text{ pro } k \in (0, +\infty), a \in E_1.$$

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkci dvou parametrů - a, k .

Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle "a".

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} (e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $\boxed{G(x) = e^{-kx}}$ pro $x \in (0, +\infty)$

(funkce G "závisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0, +\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a, k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax dx = \frac{k}{a^2 + k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$\boxed{F(a, k) = \arctg \frac{a}{k} + C(k)},$$

40
kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0, +\infty)$ (proč?).
Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$\boxed{F(0, k) = 0, \text{ tj. } C(k) = 0.}$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61,

$$\frac{\partial}{\partial k} (e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}) = -e^{-kx} \cdot \sin ax.$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0, +\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p, +\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$|e^{-kx} \sin ax| \leq e^{-kx} \leq e^{-px}, \quad x \in (0, +\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integraci opět dostaváme (provedete podrobně!, viz 4,47)

$$F(a, k) = \arctg \frac{a}{k} + C(a),$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a . Rovnost platí pro všechna $k \in (p, +\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0, +\infty)$.

Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \rightarrow +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim_{k \rightarrow +\infty} F(a, k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F(a, k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\arctg \frac{a}{k} + C(a) \right] = C(a).$$

Podle 4,20 (provedete ještě jednou)! je $\lim_{k \rightarrow +\infty} F(a, k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Teda $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi. ||

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ má v intervalu $(0, +\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je!

1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

$$6,26. \text{ Spočtěte } F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx !$$

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$,

$b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -xe^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}, \text{ konvergentní majoranta je}$$

$$G(x) = xe^{-px^2} \quad \text{pro } x \in (0, +\infty), \quad a \in (p, +\infty), \quad p > 0.$$

Tedy

$$F(a,b) = -\frac{1}{2} \log a + C(b), \text{ protože } F(b,b) = 0,$$

$$\text{je } C(b) = \frac{1}{2} \log b, \quad \text{tj. } F(a,b) = \log \frac{b}{a} .$$

(2a)

$$6,27. \text{ Spočtěte } J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+ac \cos x)}{\cos x} dx !$$

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1, +1)$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+ac \cos x)}{\cos x}$ všeude v $(0, \pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1, +1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+ac \cos x} .$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in (-p, +p)$ a pro $x \in (0, \pi)$ platí

$$\left| \frac{1}{1+ac \cos x} \right| = \frac{1}{|1+ac \cos x|} \leq \frac{1}{1-|ac \cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \left| \frac{1}{1-p} \right|,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0, \pi)$.

Pomocí substituce $t = \underline{\underline{\tan \frac{x}{2}}}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

?

$$J(a) = \pi \arcsin a \quad \text{pro } a \in (-1, +1).$$

X c/ Ukažte, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro všechna $a \in (-1, +1)$, stačí ukažat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $(-1, +1)$ (proč?).

(2a)

k důkazu posledního tvrzení použijte větu 60 a vztahu

$$a \in (-1, +1) \Rightarrow \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} \leq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} \leq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

proveděte podrobně!]

(2b)

6,28. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1, +1)$.

b/ Spočtěte $J(a)$ pomocí věty 61, dostanete

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2 \cos^2 x} \text{ s konvergentní majorantou}$$

$$G(x) = \frac{2}{1-p^2} \quad \text{pro } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad a \in (-p, +p) \subset (-1, +1).$$

Po substituci $\tan x = t$ dostanete $J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy

$$(J(0) = 0) \quad J(a) = \pi \arcsin a \quad \text{pro } a \in (-1, +1).$$

c/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $(-1, +1)$, odkud vyplýne, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in (-1, +1)$ - viz předchozí příklad 6,27.

d/ Použijte též výsledku př. 6,27, dostanete

$$\begin{aligned} \pi \cdot \arcsin a &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x) dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} dx + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx = J(a) \quad \text{pro } a \in (-1, +1). \end{aligned}$$

6,29. Spočtěte $K(A) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+\sin A \cos x)}{\cos x} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $A \in E_1$.

b/ Uvědomte si, že $K(A)$ je periodická funkce s periodou 2π .

c/ Při vlastním výpočtu (použití věty 61) je třeba vyloučit hodnoty, kde $|\sin A| = 1$ (proč?), vyjde $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

d/ Ukažte, že funkce K je spojitá v E_1 , tedy $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$.

e/ Ukažte, že $K(A) = \pi A$ pro $A \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

2c)

$$6,19. \text{ Spočtěte } F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\operatorname{atgx})}{\operatorname{tgx}} dx !$$

1/ I když to v těchto příkladech není nutné, budeme vždy zkoumat, pro jaké hodnoty parametru a daný integrál konverguje.

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $a \in E_1$.

2/ Podle věty 61 spočítáme $F'(a)$, vzhledem k tomu, že funkce F je lichá (proč?), omezíme se jen na hodnoty $a \geq 0$, tj. ve větě 61 položíme $M = (0, \frac{\pi}{2})$, $A = (0, +\infty)$.

Ověřujeme jednotlivé předpoklady věty 61:

D a/ pro každé $a \in (0, +\infty)$ je $\frac{\arctg(\operatorname{atgx})}{\operatorname{tgx}} \in L_{(0, \frac{\pi}{2})}$ (proč?),

b/ integrál konverguje pro $a = 0$ (my jsme vlastně ukázali daleko více - že konverguje pro všechna $a \in E_1$!),

c/ pro každé $a \in (0, +\infty)$ a každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ existuje

lepisí přesopat

$S a \in (-\frac{1}{2}, \infty)$

a lichot užit

ořež počtem

d/ musíme najít konvergentní majorantu k této derivaci, položme

$$G(x) = \sup_{a \in (0, +\infty)} \frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{pro } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

zřejmě $G(x) = \underline{1}$ pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, tedy $G \in L_{(0, \frac{\pi}{2})}$.

Podle tvrzení věty 61 integrál konverguje pro všechna $a \in (0, +\infty)$

a

D spočítat $F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} dx, \quad a \in (0, +\infty)$.

Podle př. 6,17 zjistíme, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}, \quad a \in (0, +\infty).$$

Odtud plyně, že existuje taková konstanta C , pro niž $F(a) =$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+a) + C, \quad a \in (0, +\infty) \quad (\text{odůvodněte!}).$$

Zbývá nyní jen určit hodnotu konstanty C . Víme však, že předchozí rovnost platí pro všechna $a \in (0, +\infty)$, tedy i pro $a = 0$. Protože $F(0) = 0$, dostáváme ihned, že

$O = F(0) = \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+0) + C,$
tj. $C = 0$.

f/ Nakreslete graf funkce $K(A)$!

g/ Má funkce $K(A)$ všeude v E_1 derivaci ?

h/ Porovnejte výsledek s př. 6,27 - stačilo položit $a = \sin A$.]]

2d) 6,30. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a \in E_1$, $b \in E_1$ s výjimkou $a = b = 0$.

b/ Funkce $F(a,b)$ je sudá v a'' i b'' , omezte se proto na $a \geq 0$, $b \geq 0$.

c/ Zvolme libovolné $b \in (0,+\infty)$ pevné, bud $a \in (0,+\infty)$.

Podle věty 61 dostanete

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2 \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$

(majoranta pro $a \in (p,+\infty)$), kde $p > 0$

$$\left| \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2 \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \right| \leq \left| \frac{2}{a} \right| \leq \frac{2}{p} \in \mathcal{L}(0, \frac{\pi}{2})$$

Substitucí $\tg x = t$ dostanete $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$.

Ze vztahu $F(b,b) = \pi \cdot \log b$ vyplýne konečně

F(a,b) = $\pi \cdot \log \frac{a+b}{2}$ pro $a > 0$, $b > 0$.

d/ Ukažte, že výsledek platí i pro $a = 0$, $b > 0$ (či $a > 0$, $b = 0$).

Bud tedy $b \in (0,+\infty)$ pevné, stačí ukázat, že funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a je spojitá v bodě 0 zprava. Použijte větu 60 ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in (0,1)$) a odhadu

$$\log b^2 \cos^2 x \leq \log(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) \leq \log(1 + b^2)$$

e/ Pomocí předchozího výsledku odtud odvodte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2},$$

viz též př. 5,87; 8,64.

$$(3) \quad F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$$

pro $\alpha \geq 0$ konvergiert (siehe i. LSE)

pro $\alpha \in (0, \infty)$ $F(\alpha)$ stetig

$$F'(0) + F(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

(d) $\downarrow \alpha$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{-e^{-\alpha x} (-x)}{1+x^2} dx \quad \text{oder vertausch } -\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F''(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{-x \cdot e^{-\alpha x} (-x)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{polz} \quad F''(0) + F(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x} (x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^\infty e^{\alpha x} dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

$$(4) F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$$

(a) $D_F = [0, \infty)$

(b) F je spojita na $[0, \infty)$

(před 2 týdny)

$$(c) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha) = 0$$

$F(x_\infty)$ je spojitá v x i $\alpha \rightarrow \infty$ → měřitelná!

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} = 0$$

mají rámec $\frac{1}{1+x^2}$

(d) F je nerostoucí

$$F'(\alpha) = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-\alpha x}(-x)}{1+x^2}}_{< 0} dx \leq 0 \quad \text{na } (0, \infty)$$

(e) F je konkávní

$$F''(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx > 0 \quad \text{na } (0, \infty)$$

$$(f) \max F(\alpha) = F(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\inf_{\alpha \in [0, \infty)} F(\alpha) = 0$$

minima neexistují

$$\text{Tedy } F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x} \quad \text{pro } x \in (0, +\infty) .$$

e/ Ukažte, že je též splněna rovnice

$$F'(x) + 2 F(x) = 0 \quad \text{a}$$

1/ vypočtěte z této diferenciální rovnice $F(x)$,

2/ řešte soustavu

$$2 F(x) - F'(x) = 2 e^{-2x} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$2 F(x) + F'(x) = 0$$

jako soustavu dvou lineárních rovnic .]]

6,52.

Posledním úkolem, kterým se budeme zabývat, je studium a nakreslení grafu funkce zadané integrálem, podrobněji - je dána funkce F , $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha) dx$, my máme nakreslit graf této funkce F .

Při řešení tohoto problému budeme postupovat takto:

1/ zjistíme maximální obor D_F ("definiční obor"), ve kterém je funkce F definována a konečná, tj. zjistíme množinu těch $\alpha \in E_1$, pro která konverguje $\int_M f(x, \alpha) dx$,

$$\text{tedy } D_F = \left\{ \alpha \in E_1 ; f^*, \alpha \in L_M \right\},$$

2/ budeme zkoumat spojitost funkce F v množině D_F ,

3/ spočítáme limity funkce F v "krajních bodech" množiny D_F , přesněji - je-li např. $D_F = (a, b)$, spočítáme

$$\lim_{\alpha \rightarrow b_-} F(\alpha), \quad \lim_{\alpha \rightarrow a_+} F(\alpha),$$

4/ budeme zkoumat monotonii F ,

5/ eventuálně pro podrobnější studium vyšetříme extrémy funkce F , resp. konkavitu a konvexitu.

4

6,53. Nakreslete graf funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$!

1/ Zjistěte, že $D_F = (0, +\infty)$.

2/ Ukažte, že F je spojitá v $(0, +\infty)$ (viz př. 6,3).

3/ Ukažte, že $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 0$ (viz př. 4,21).

4/ Ukažte, že F je nerostoucí v $(0, +\infty)$:

A a/ zvolte libovolné $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, potom ze vztahu

$$\frac{e^{-\alpha_1 x}}{1+x^2} \geq \frac{e^{-\alpha_2 x}}{1+x^2} \quad x \in (0, +\infty)$$

plyne i $F(\alpha_1) \geq F(\alpha_2)$ (ukážte, že dokonce $F(\alpha_1) > F(\alpha_2)$),

b/ $F'(a) < 0$ pro $a \in (0, +\infty)$, odtud plyne, že F je klesající v $(0, +\infty)$.

5/ Ukažte, že F je konvexní v intervalu $(0, +\infty)$ (spočtěte F'' !)

6/ Ukažte, že

$$\max F(a) = F(0) = \frac{\pi}{2}, \inf_{a \in (0, +\infty)} F(a) = 0,$$

minima funkce F nenabývá.

* 7/ Ukažte, že $F'_+(0) = -\infty$.

(Podle známé věty - vyslovte ji a odůvodněte - jest

$$F'_+(0) = \lim_{a \rightarrow 0_+} F'(a) \text{ a zjistíte, že}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0_+} F'(a) = \int_0^\infty \lim_{a \rightarrow 0_+} \left(-\frac{xe^{-ax}}{1+x^2} \right) dx = - \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx = -\infty.$$

Jednotlivé kroky si znova podrobně proveděte! Nakreslete graf!]]

C

6,54. Nakreslete graf funkce $F(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ /!

1/ $D_F = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, F je funkce sudá,

2/ F je spojitá v D_F ,

3/ $\lim_{a \rightarrow 0_+} F(a) = +\infty$, $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 0$,

4/ F je klesající v intervalu $(0, +\infty)$

5/ F je konvexní v intervalu $(0, +\infty)$.]]

6,55. Nakreslete grafy funkcí

$$a/ F(a) = \int_1^\infty \frac{1}{x(x+a)^2} dx,$$

$$b/ F(a) = \int_0^1 \frac{\log(1-a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx,$$

6

$$6,31. \text{ Spočtěte } I(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin kx dx !$$

a/ Ukažte, že pro $a > 0$, $b > 0$, $k \in E_1$ integrál konverguje.

b/ Zvolte $k \in E_1$, $b \in (0,+\infty)$ pevně, buď $a \in (0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial I}{\partial a} (a,b,k) = \int_0^\infty -e^{-ax} \sin kx dx = \frac{-k}{a^2+k^2} \quad (\text{viz pr. 4,47})$$

konvergentní majoranta $G(x) = e^{-px}$ pro $x \in (0,+\infty)$,
 $a \in (p,+\infty) \subset (0,+\infty)$.

Odtud plynε, že

$$I(a,b,0) = 0 \quad (\text{přímo vidět}),$$

$$I(a,b,k) = \arctg \frac{b}{k} - \arctg \frac{a}{k} \quad \text{pro } k \neq 0,$$

neboť $I(b,b,k) = 0$.

c/ Výsledek srovnajte s příkladem 6,22, podle kterého jest

$$\begin{aligned} I(a,b,k) &= \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin kx}{x} dx - \int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin kx}{x} dx = \\ &= \arctg \frac{k}{a} - \arctg \frac{k}{b} \quad \text{pro } a > 0, b > 0, k \in E_1. \end{aligned}$$

Není to ve sporu s předešlým výpočtem? Ukažte, že ne.

Pro $k = 0$ dostáváte v obou případech $I(a,b,0) = 0$.

Dále ukažte, že pro libovolné $z \neq 0$ platí

$$\arctg z + \arctg \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} z,$$

odkud již vyplýne, že pro libovolná $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ platí

$$\arctg z_1 - \arctg z_2 = \arctg \frac{1}{z_1} - \arctg \frac{1}{z_2} . \blacksquare$$

$$6,32. \text{ Spočtěte } J(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \cos kx dx !$$

Obdobně příkladu 6,31, obdržíte

$$J(a,b,k) = \frac{1}{2} \log \frac{b^2+k^2}{a^2+k^2} \quad \text{pro } k \in E_1, a > 0, b > 0 .$$

7

$$6,33. \text{ Spočtěte } P(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx !$$

a/ Ukažte, že pro $a \in (0,+\infty)$, $b \in E_1$, $c \in E_1$ integrál konverguje.

7

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \arctg \frac{b}{a} - \arctg \frac{c}{a} \quad \text{pro } a > 0, b,c \in E_1.$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22. ||

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} dx$!

Obdoba př. 6,33, $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0, b,c \in E_1$. ||

6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Bud $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = - \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{viz př. 5,84}),$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$),
tedy - vzhledem k $F(b,b) = 0$ - jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro } a > 0, b \geq 0.$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0, b \geq 0$.
Toto tvrzení dokážte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $(0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0, b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0, b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie.
Vše podrobně provedte!

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a. ||

6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} dx$!

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a \rightarrow 0_+} K(a,b) = \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[\frac{\pi}{b} \cdot \log(b+a) + C(b) \right] = \frac{\pi}{b} \cdot \log b + C(b)$$

a zbyvá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2+x^2} dx$. Pomocí

substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b} \log b$,
tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|} \cdot \log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a, b \in E_1, b \neq 0.$$

8 6,43. Spočtěte $F(a,b, \alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot \cos bx - e^{-\alpha x} \cdot \cos \beta x}{x} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0, \alpha > 0, b, \beta \in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b, \alpha, \beta) = \int_0^\infty -e^{-ax} \cos bx dx = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a \in (p, +\infty)$, kde $p > 0$),

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b, \alpha, \beta) = \int_0^\infty -e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-ax}).

Odtud plyne, že

$$F(a,b, \alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) + C(\alpha, \beta) \quad a$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha, \beta, \alpha, \beta) = 0$ jest

$$F(a,b, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \log \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 + b^2} \quad \text{pro } a > 0, \alpha > 0, b, \beta \in E_1.$$

6,44. Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0, b > 0$ či $a < 0, b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a \in (0, +\infty)$.
Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2 x^2}$ pro $a \in (p, +\infty)$, kde $p > 0$).