

## 11. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, [kunck6am@natur.cuni.cz](mailto:kunck6am@natur.cuni.cz)

### Teorie

**Definice 1** (Diferencovatelné zobrazení). Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  je zobrazení diferencovatelné v bodě  $x \in G$ . Matice lineárního zobrazení  $\varphi'(t)$  se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení  $\varphi$  v bodě  $t$ . Je to tedy matice

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

Zobrazení  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  nazveme *regulární*, jestliže má spojitou derivaci (tj. spojitě všechny parciální derivace) a jeho Jacobiho matice má všude v  $G$  hodnotu  $n$ .

Je-li  $m = n$ , pak je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme *jakobiánem* zobrazení  $\varphi$  v bodě  $t$ .

### Postup výpočtu $\int_M f(x) dx$

1. volba substituce
2. ověření předpokladů věty (hlavně regularita)
3. výpočet  $J_\varphi$
4. určení  $\phi^{-1}(M)$
5. výpočet integrálu  $\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t)) |J_\varphi(t)| dt$

### Příklady

1. Zakreslete následující množiny:

$$(r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

(a)  $r \in [0, 4], \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(e)  $r \in [1, 4], \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(b)  $r \in [0, 4], \alpha \in [0, \pi]$

(f)  $r \in [2, 4], \alpha \in [0, \pi]$

(c)  $r \in [0, 4], \alpha \in [-\pi, \pi]$

(g)  $r \in [-1, 4], \alpha \in [-\pi, \pi]$

(d)  $r \in [0, 4], \alpha \in [0, 2\pi]$

2. (a)  $\int_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$   
(b)  $\int_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 < e, y \geq 0\}$   
(c)  $\int_M x d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$   
(d)  $\int_M (x^2 + y^2) d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$

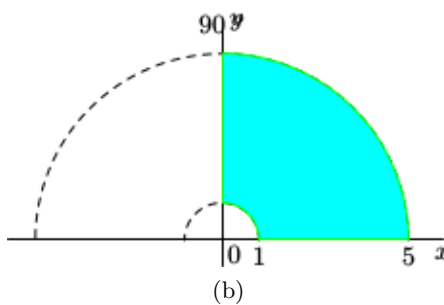
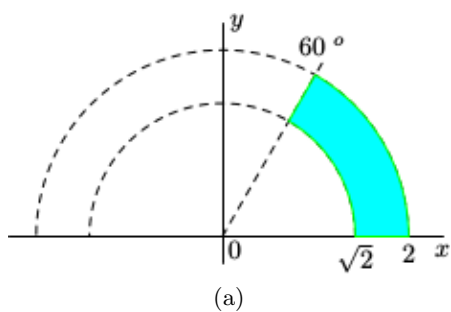
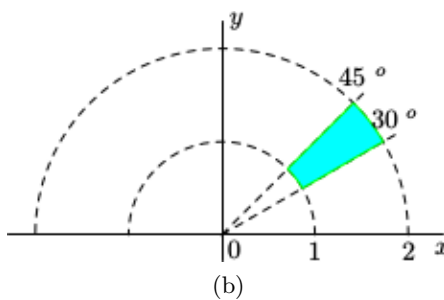
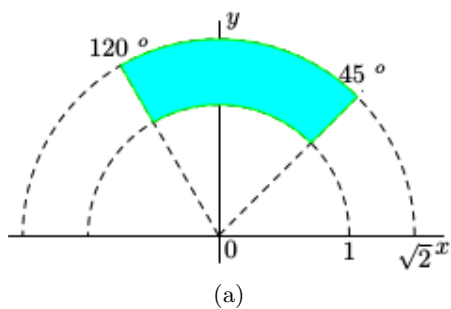
- (e)  $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < x\}$
- (f)  $\int_M \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x, x \leq x^2 + y^2 \leq 3x\} \setminus (0, 0)$
- (g) Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ,
- (h)  $\int_M \arctan \frac{y}{x} d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
- (i)  $\int_M \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$
- (j)  $\int_M x^2 y^2 d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$
- (k)  $\int_M \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda$ , kde  $M$  je ohraničena křivkami  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 8x$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ .
- (l) Spočítej míru množiny  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x + y)^4 < ax^2y, x > 0\}$ ,  $a > 0$   
(Hint)
- (m) míru  $M$ , kde  $M$  je ohraničena křivkami  $xy = a$ ,  $xy = b$ ,  $y^2 = mx$ ,  $y^2 = nx$ ,  $0 < a < b$  a  $0 < m < n$ .
- (n)  $\int_M \frac{y^3}{x^3} d\lambda$ , kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 3, x \leq y^2 \leq 2x\}$

## Bonus

3. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

- (a) i.  $\int_{-4}^e \int_1^3 \int_0^2 xyz^2 dz dy dx$       iii.  $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-4}^e xyz^2 dx dz dy$
- ii.  $\int_0^2 \int_1^3 \int_{-4}^e xyz^2 dx dy dz$
- (b) i.  $\int_0^3 \int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \frac{x}{z} \cos y dz dy dx$       iii.  $\int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \int_0^3 \frac{x}{z} \cos y dx dz dy$
- ii.  $\int_0^3 \int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \frac{x}{z} \cos y dy dz dx$       iv.  $\int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \int_0^3 \frac{x}{z} \cos y dx dy dz$
- (c) i.  $\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \sqrt{z} r^2 \sin \alpha dr d\alpha dz$       iii.  $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \int_0^1 \sqrt{z} r^2 \sin \alpha dz dr d\alpha$
- ii.  $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \sqrt{z} r^2 \sin \alpha dr dz d\alpha$       iv.  $\int_0^1 \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z} r^2 \sin \alpha d\alpha dr dz$

4. Zapište následující množiny polárními souřadnicemi



$(2a) \int \sin t \, dt = -\cos t + \sin t$   
 $x/f = a \cdot fx = n$  (17)  
 $x/f = a \cdot fx = n$  (17)  
 $(\infty, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 0) \cup (\frac{\pi}{2}, \infty)$   
 $x/z \cdot h = a \cdot fx = n$  (17)  
 $(2m) \text{ jak } (17)$

