

12. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Postup výpočtu $\int_M f(x)dx$

1. volba substituce (regularita)
2. výpočet J_φ
3. ověření předpokladů věty (hlavně
4. určení $\phi^{-1}(M)$
5. výpočet integrálu $\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)| dt$

Příklady

1. $\int_M x^2 + y^2$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
válec, cylindrické
2. $\int_M \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; x, y, z \geq 0\}$
osminka koule (rozdíl dvou koulí), sférické
3. $\int_M z d\lambda$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1, z > 0\}$
kužel, cylindrické
4. $\int_M (x^2 + y^2)z dA$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$
kužel v kouli, sférické
5. $\int_M (x^4 + y^4)z dA$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
válec v kouli, válcové
6. $\int_M z dA$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z\}$
elipsoid, sférické s posunutím

7. Spočítejte objem tělesa (anuloid - torus) ohraničeného plochou: $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}$, $0 < b < a$.

donut

8. Spočítejte objem tělesa určeného vztahy $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; x^2 + y^2 \leq 4y\}$

Vivianiho okénko, cylindrické

9. $\int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA$,

kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

parabolický kužel

10. $\int_M x^2 + y^2 + z^2 dA$,

kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$

kornout se zmrzlinou, sférické

11. Spočítejte míru množiny M , kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$

položený válec

12. $\int_M z dA$,

kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$

kužel na podlaze

13. Spočítejte objem tělesa určeného vztahy: $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

muffin, sférické

14. Spočítejte objem tělesa určeného vztahy: $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$

trochu jiný kornout se zmrzlinou

Bonus

15. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.

16. Určete hmotnost koule o poloměru a . Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

17. Přiřaďte rovnici obrázku.

- (a) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (b) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0\}$
- (c) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
- (d) Ohraničeno plochami $z = 0$, $z = 3$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ a navíc $y \geq 0$
- (e) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; z \geq 0\}$
- (f) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$
- (g) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$
- (h) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$
- (i) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$
- (j) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$
- (k) $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ a $M_2 = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 1]$
- (l) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1; z \geq 0; y^2 + z^2 \leq 1\}$

