

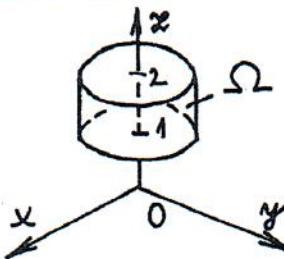
12 Trojný integrál - Transformace integrálů

111. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega : 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení Integrační obor Ω určený vztahy $1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\begin{aligned}\varrho &\in (0, 1), \\ \varphi &\in (0, 2\pi), \\ z &\in (1, 2).\end{aligned}$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.

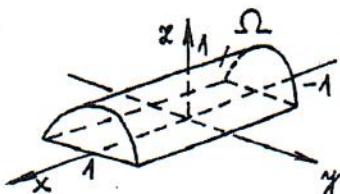


Obrázek 41: $\Omega : 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz = \iiint_{\Omega^*} \varrho^3 \, d\varrho \, d\varphi \, dz = \\ &= \int_0^1 \varrho^3 \, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_1^2 dz = \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

112. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$, kde $\Omega : -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$.

Řešení Vztahy $-1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou x. Viz Obrázek 42.



Obrázek 42: $\Omega : -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic“. Transformační rovnice jsou tvaru

$$\begin{aligned}x &= x, \\ y &= \varrho \cos \varphi, \\ z &= \varrho \sin \varphi.\end{aligned}$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t dt$, $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojného integrálu.

$$\Phi : \begin{aligned} x &= r \cos t \sin s \\ y &= r \sin t \sin s \\ z &= r \cos s \end{aligned} \quad 0 \leq r, 0 \leq t < 2\pi, 0 \leq s \leq \pi .$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos t \sin s & \sin t \sin s & \cos s \\ -r \sin t \sin s & r \cos t \sin s & 0 \\ r \cos t \sin s & r \sin t \cos s & -r \sin s \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin s ,$$

dostaneme

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos t \sin s, r \sin t \sin s, r \cos s) \cdot r^2 \sin s dr dt ds .$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\Phi : \begin{aligned} x &= r \cos t \cos s \\ y &= r \sin t \cos s \\ z &= r \sin s \end{aligned} \quad 0 \leq r, 0 \leq t < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2} ,$$

pak ovšem vychází $|\det D\Phi| = r^2 \cos s$.

Příklad 8.17:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz , \text{ kde } \Omega = \{[x, y, z]; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \} .$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \leq r \leq 3$, z dalších tří podmínek dostaváme $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \iiint_{(1,3) \times (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})} \frac{r \cos s}{\sqrt{r^2 \cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s}} \cdot r^2 \sin s dr dt ds = \\ &= \int_1^3 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s ds = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3}\pi . \end{aligned}$$

Příklad 8.18:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)z dx dy dz , \text{ kde } \Omega = \{[x, y, z]; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, \} .$$

řešení:

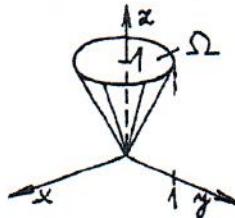
Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \leq r \leq 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2 \sin^2 s \leq r^2 \cos^2 s$, neboli $|\operatorname{tg} s| \leq 1$, což spolu s třetí podmínkou dává $0 \leq s \leq \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou t není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)z dx dy dz &= \iiint_{(1,2) \times (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{4})} (r^2 \cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s) \cdot r \cos s \cdot r^2 \sin s dr dt ds = \\ &= \iiint_{(1,2) \times (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{4})} r^5 \sin^3 s \cos s dr dt ds = \underbrace{\int_1^2 r^5 dr}_{=21} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s \cos s ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4}\pi . \end{aligned}$$

95. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} z \, dx dy dz$, kde $\Omega : z = 1, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení Integrační obor Ω je kužel. Viz Obrázek 25. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu (x, y, z) . Platí $\Omega = \{(x, y, z); -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$.

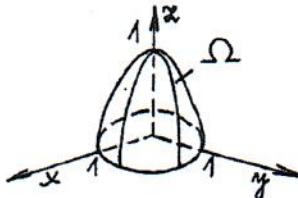
(3)

Obrázek 25: $\Omega : z = 1, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dx dy dz &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z \, dz \right) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[y(1-x^2) - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ -1 \rightarrow -\frac{1}{2}\pi, 1 \rightarrow \frac{1}{2}\pi \end{array} \right| = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi = \frac{1}{4} \pi. \end{aligned}$$

96. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} dx dy dz$, kde $\Omega : z = 0, z = 1 - x^2 - y^2$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen paraboloidem a rovinou. Viz Obrázek 26. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu $(x, y, z) : \Omega = \{(x, y, z); -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

Obrázek 26: $\Omega : z = 0, z = 1 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[y(1-x^2) - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi = \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$

3

$$\int_M z \, d\lambda$$

$$M: x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1, z \geq 0$$

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$z = z \quad \text{polar} \quad 0 \leq r^2 \leq z^2 \leq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^z z \cdot r \, dr \, dz \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^1 z^3 \, dz \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8} z^4 \right]_0^1 \, d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t dt$, $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojněho integrálu.

$$\begin{aligned}\Phi : \quad & x = r \cos t \sin s \\ & y = r \sin t \sin s \quad 0 \leq r, 0 \leq t < 2\pi, 0 \leq s \leq \pi \\ & z = r \cos s\end{aligned}$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos t \sin s & \sin t \sin s & \cos s \\ -r \sin t \sin s & r \cos t \sin s & 0 \\ r \cos t \sin s & r \sin t \cos s & -r \sin s \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin s,$$

dostaneme

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos t \sin s, r \sin t \sin s, r \cos s) \cdot r^2 \sin s dr dt ds.$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\begin{aligned}\Phi : \quad & x = r \cos t \cos s \\ & y = r \sin t \cos s \quad 0 \leq r, 0 \leq t < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}, \\ & z = r \sin s\end{aligned}$$

pak ovšem vychází $|\det D\Phi| = r^2 \cos s$.

Příklad 8.17:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz, \text{ kde } \Omega = \{[x, y, z]; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \}.$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \leq r \leq 3$, z dalších tří podmínek dostaváme $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \iiint_{\langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} \frac{r \cos s}{\sqrt{r^2 \cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s}} \cdot r^2 \sin s dr dt ds = \\ &= \int_1^3 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s ds = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3} \pi.\end{aligned}$$

Příklad 8.18:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) z dx dy dz, \text{ kde } \Omega = \{[x, y, z]; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, \}.$$

řešení:

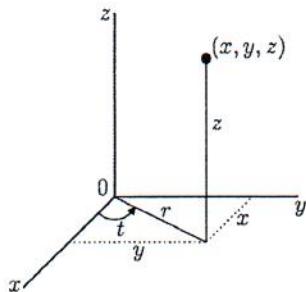
Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \leq r \leq 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2 \sin^2 s \leq r^2 \cos^2 s$, neboli $|\operatorname{tg} s| \leq 1$, což spolu s třetí podmínkou dává $0 \leq s \leq \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou t není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) z dx dy dz &= \iiint_{\langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle} (r^2 \cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s) \cdot r \cos s \cdot r^2 \sin s dr dt ds = \\ &= \iiint_{\langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle} r^5 \sin^3 s \cos s dr dt ds = \underbrace{\int_1^2 r^5 dr}_{=\frac{21}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s \cos s ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4} \pi.\end{aligned}$$

kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a } z^* \in \mathbb{R}.$$



Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 t + \sin^2 t) = r.$$

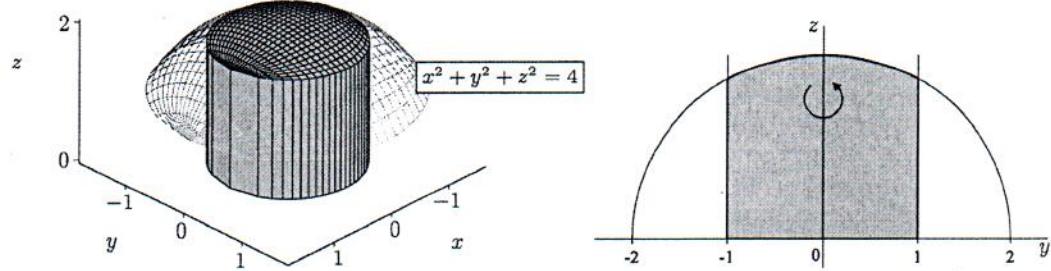
Poznámka 2.20. Substituci do cylindrických souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice půdorysu tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kružnic. Samozřejmě, že vhodnost či nevhodnost substituce ovlivňuje také samotná integrovaná funkce.

5

Příklad 2.21. Vypočtěte integrál $I = \iiint_{\Omega} (x^4 + y^4) z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Množina Ω je válec „seříznutý“ shora kulovou plochou.



Zavedeme-li válcové souřadnice

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z,$$

5

obdržíme omezení

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}.$$

Podle věty 2.18 tedy platí

$$I = \iiint_{M_{rtz}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dr \, dt \, dz,$$

kde

$$M_{rtz} = \left\{ (r, t, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}.$$

Užijeme-li nyní Fubiniovou větu (2.10 a 1.22), dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dz \right) \, dt \right) \, dr = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \int_0^1 \left(r^5 \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz \right) \right) \, dr = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^1 \left(r^5 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} \right) \, dr = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (4r^5 - r^7) \, dr = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2r^6}{3} - \frac{r^8}{8} \right]_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{24} = \\ &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t) \, dt = \\ &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t \right) \, dt = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4} \right) \, dt = \\ &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4} \right) \, dt = \frac{13}{48} \left[\frac{3}{4}t + \frac{\sin 4t}{16} \right]_0^{2\pi} = \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{13}{32}\pi. \end{aligned}$$



Poznámka 2.22. Rozmyslete si, že substitucí do cylindrických souřadnic a Fubiniovou větou dostaneme totéž, jako užitím Fubiniové věty a následné substituce do polárních souřadnic v příslušném dvojném integrálu.

2.3.5 Substituce do zobecněných sférických souřadnic

Nechť $a, b, c > 0$ jsou daná čísla. Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= b \cdot \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= c \cdot \rho \sin \vartheta,\end{aligned}$$

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Podobně jako u klasických sférických souřadnic můžeme i zde vypočítat Jacobián zobrazení

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = abc \cdot \rho^2 \cos \vartheta.$$

Poznámka 2.25. Substituce do zobecněných sférických souřadnic se používá, pokud těleso Ω , přes které integrujeme, má tvar elipsoidu.

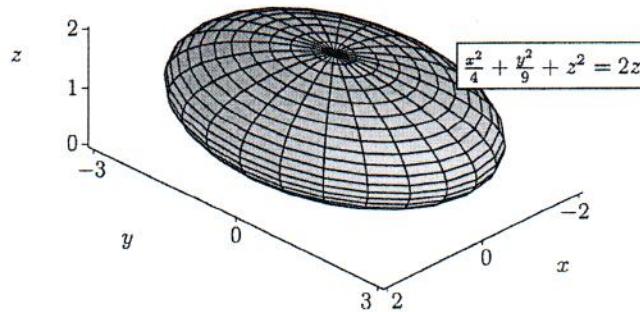


Příklad 2.26. Vypočtěte integrál $I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, kde

6

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z \right\}.$$

Řešení. Podmínu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ lze ekvivalentně upravit do tvaru $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1$. Odtud je vidět, že Ω je elipsoid se středem v bodě $(0, 0, 1)$ a poloosami 2, 3 a 1.



Použijeme zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta.\end{aligned}$$

6

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$. Dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ dostaneme $\rho^2 \leq 2\rho \sin \vartheta$. Není těžké si uvědomit, že elipsoid Ω je pak určen omezeními

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2 \sin \vartheta \rangle.$$

To tedy znamená, že

$$I = \iiint_M \rho \sin \vartheta \cdot |J| d\rho d\varphi d\vartheta = \iiint_M 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta,$$

kde

$$M = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 2 \sin \vartheta \right\}.$$

Odtud podle vět 2.10 a 1.22 máme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \sin \vartheta} 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta \left[\frac{6\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2 \sin \vartheta} d\vartheta = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^5 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \begin{vmatrix} \text{substituce} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta d\vartheta = du \\ 0 \mapsto 0, \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{vmatrix} = \\ &= 48\pi \int_0^1 u^5 du = 48\pi \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 = 48\pi \cdot \frac{1}{6} = 8\pi. \end{aligned}$$

Jiná možnost, jak integrál spočítat, je použít „posunuté“ zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= 1 + \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je opět $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$ a dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$, která je ekvivalentní s nerovností $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1$, obdržíme $\rho^2 \leq 1$, tj. $0 \leq \rho \leq 1$. Odtud (podobně jako u prvního způsobu výpočtu) dostaneme, že

$$I = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot |J| d\rho d\varphi d\vartheta = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta,$$

kde

$$N = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

6

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál I platí

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left[6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 \, d\rho = 24\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \\
 &= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi.
 \end{aligned}$$

▲

2.4 Některé aplikace trojnitého integrálu

2.4.1 Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa M definujeme pomocí vztahu

$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz.$$

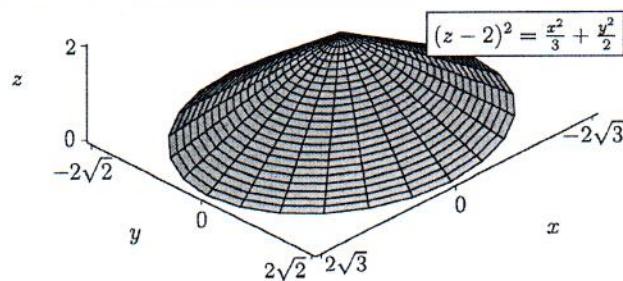
Poznámka 2.27. Uvažujme množinu T stejnou jako v kapitole 1.6.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.



Příklad 2.28. Vypočtěte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohrazeného plochami

$$(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, \quad z = 0.$$

Řešení. Naše těleso M je částí eliptického kuželetu.



Poznámka 2.29. V předchozím příkladu bychom také mohli postupovat tak, že bychom (pro vhodná a, b) zavedli tzv. zobecněné cylindrické souřadnice, tj.

$$\begin{aligned}x &= a \cdot r \cos t, \\y &= b \cdot r \sin t, \\z &= z^*(= z),\end{aligned}$$

kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$a - z^* \in \mathbb{R}$.

Jacobián tohoto zobrazení je

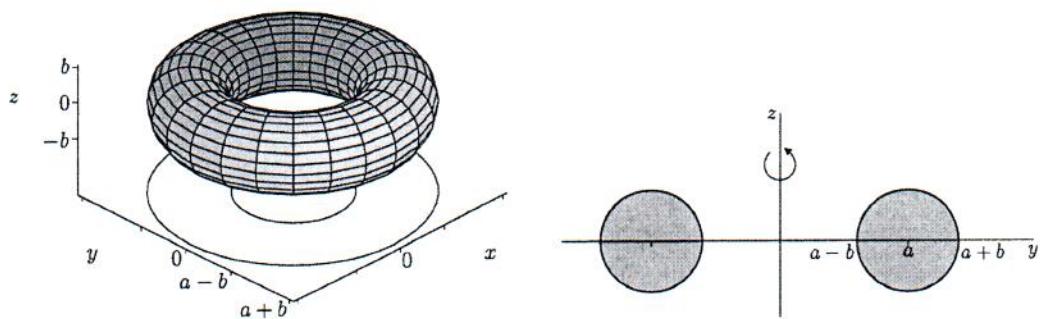
$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t & 0 \\ b \sin t & br \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cdot r (\cos^2 t + \sin^2 t) = ab \cdot r.$$

Domácí cvičení 2.30. Pokuste se vyřešit příklad 2.28 pomocí zobecněných cylindrických souřadnic (viz poznámka 2.29).

Příklad 2.31. Vypočtěte objem tělesa M ohraničeného plochou (anuloidem)

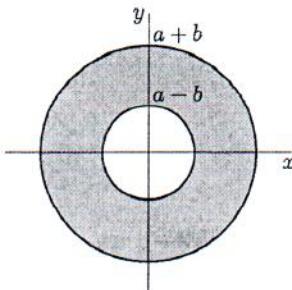
  $\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a).$

Řešení.



Víme, že pro objem tělesa M platí $\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$. Řezem tělesa M rovinou $z = 0$ je mezikruží znázorněné na obrázku níže.

7



Pro výpočet $\lambda(M)$ bude tedy vhodné použít v příslušném integrálu transformaci do cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= r \sin t, \\z &= z.\end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M v těchto nových (cylindrických) souřadnicích popíšeme podmínkami (promyslete to!)

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad r \in \langle a-b, a+b \rangle, \quad z \in \left\langle -\sqrt{b^2 - (r-a)^2}, \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \right\rangle.$$

Proto (vzhledem ke větám 1.22, 2.10 a 2.18) pro objem tělesa M platí

$$\begin{aligned}\lambda(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r \, dz \right) \, dr \right) \, dt = \\&= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \, dr = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ r-a=u \\ dr=du \\ a-b \mapsto -b \\ a+b \mapsto b \end{array} \right| = 4\pi \int_{-b}^b (u+a) \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\&= 4\pi \int_{-b}^b \underbrace{u \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{lichá v } u} \, du + 4\pi a \int_{-b}^b \underbrace{\sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudá v } u} \, du = 8\pi a \int_0^b \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\&= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ u = b \sin s \\ du = b \cos s \, ds \\ 0 \mapsto 0, \quad b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 s} \cdot b \cos s \, ds = 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s \, ds = \\&= 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2s}{2} \, ds = 8\pi ab^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2s}{4} \right]}_{=0}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\pi^2 ab^2.\end{aligned}$$

Viviani

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$$

$$x^2 + y^2 \leq 4y$$

$$x^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$J_\varphi = r$$

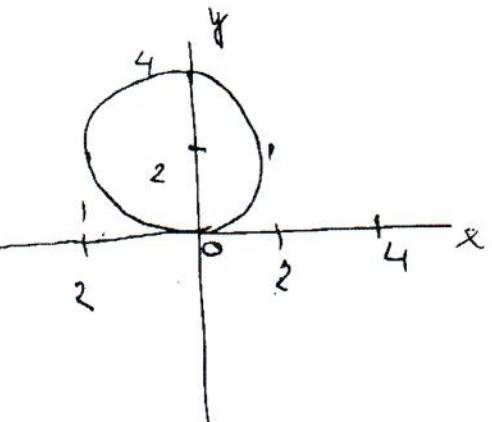
$$r^2 + z^2 \leq 16$$

$$0 \leq r^2 \leq 4r \sin \varphi$$

$$0 \leq r \leq 4 \sin \varphi$$

$$\varphi \in (0, \pi)$$

$$r \in (0, 4 \sin \varphi)$$



$$z^2 \leq 16 - r^2$$

$$-\sqrt{16-r^2} \leq z \leq \sqrt{16-r^2}$$

mne jgsgm. p̄ō s̄m̄ z̄, tecky

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \sin \varphi} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \sin \varphi} r \sqrt{16-r^2} \, dr \, d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (16-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{4 \sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} (16-16 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} (16)^{\frac{3}{2}} d\varphi$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 64 (\cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - 64 d\varphi = -\frac{64 \cdot 2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi - 64 d\varphi$$

$$= -\frac{256}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) - 1 = -\frac{256}{3} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi - \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{256}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

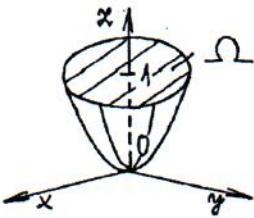
Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \varrho dx d\varrho d\varphi = \int_{-1}^1 dx \cdot \int_0^1 \varrho d\varrho \cdot \int_0^\pi d\varphi = [x]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

113. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.



Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle \varrho^2, 1 \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \varrho d\varrho d\varphi dz = \\ &= \iiint_{\Omega^*} \varrho^2 d\varrho d\varphi dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2 dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^2 [z]_{\varrho^2}^1 d\varphi \right) d\varrho = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^2 (1 - \varrho^2) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \varrho^2 (1 - \varrho^2) [\varphi]_0^{2\pi} d\varrho = 2\pi \left[\frac{1}{3} \varrho^3 - \frac{1}{5} \varrho^5 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

114. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, kde $\Omega : 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle 0, 4 - 2\varrho \rangle. \end{aligned}$$

2.3.4 Substituce do sférických souřadnic

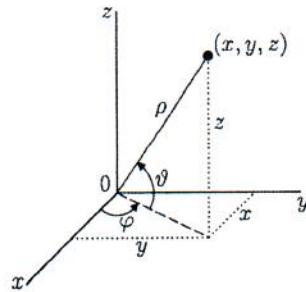
Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta,\end{aligned}$$

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$



Nyní přímým výpočtem (rozvojem podle posledního řádku) určíme Jacobián tohoto zobrazení. Platí

$$\begin{aligned}J(\rho, \varphi, \vartheta) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \cos \vartheta & -\rho \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \\&= \sin \vartheta (\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) + \rho \cos \vartheta (\rho \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Poznámka 2.23. Pro substituci do sférických souřadnic se zpravidla rozhodneme, pokud hranice tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kulových ploch.

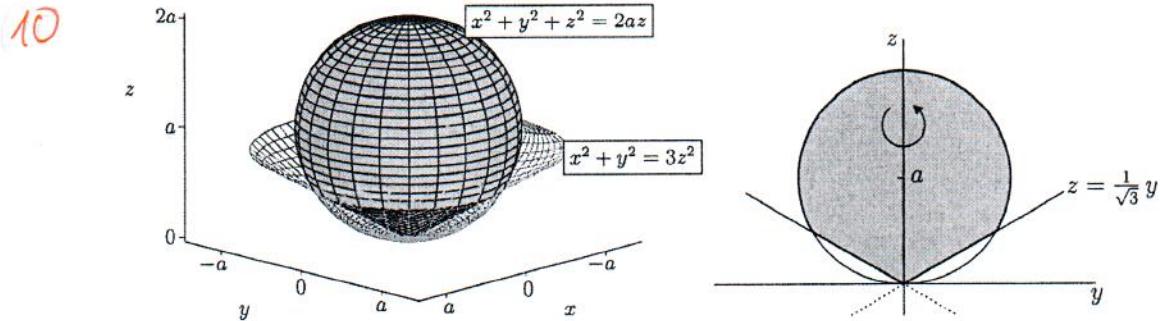
10



Příklad 2.24. Pro $a > 0$ vypočtěte integrál $I_a = \iiint_{\Omega_a} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \wedge x^2 + y^2 \leq 3z^2\}.$$

Řešení. Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$. Množina Ω_a je tedy průnikem koule (se středem v bodě $(0, 0, a)$ a poloměrem a) a rotačního kuželex (viz obrázek).



Zavedeme sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Uvědomme si ještě jednou, že

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \text{a} \quad \vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Dosazením transformačních vztahů do podmínek

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 \leq 3z^2$$

obdržíme

$$\rho^2 \leq 2a\rho \sin \vartheta \quad \wedge \quad \rho^2 \cos^2 \vartheta \leq 3\rho^2 \sin^2 \vartheta,$$

odkud dostaneme ($\rho \geq 0$)

$$\rho \leq 2a \sin \vartheta \quad \wedge \quad \cos^2 \vartheta \leq 3 \sin^2 \vartheta.$$

Z první nerovnosti obdržíme $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a z druhé následně $\cos \vartheta \leq \sqrt{3} \sin \vartheta$. Celkem tedy máme

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2a \sin \vartheta \rangle.$$

Z vět 2.18, 2.10 a 1.22 pak plyne

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \sin \vartheta} \rho^2 \cdot \rho^2 \cos \vartheta d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{2a \sin \vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{2\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \cdot 2^5 \cdot a^5 \cdot \sin^5 \vartheta d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta d\vartheta = du \\ \frac{\pi}{6} \mapsto \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} \right| = \frac{2\pi}{5} \cdot 32a^5 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^5 du = \\ &= \frac{64}{5} \pi a^5 \left[\frac{u^6}{6} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{64}{5} \pi a^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} \right) = \frac{21}{10} \pi a^5. \end{aligned}$$



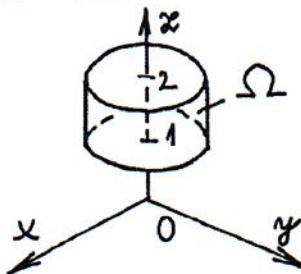
12 Trojný integrál - Transformace integrálů

111. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dx dy dz$, kde $\Omega : 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení Integrační obor Ω určený vztahy $1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\begin{aligned}\varrho &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle 1, 2 \rangle.\end{aligned}$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.



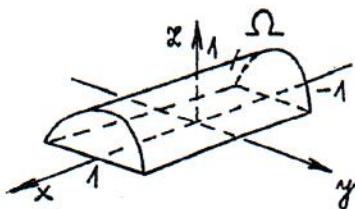
Obrázek 41: $\Omega : 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \varrho \, d\varrho d\varphi dz = \iiint_{\Omega^*} \varrho^3 \, d\varrho d\varphi dz = \\ &= \int_0^1 \varrho^3 \, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_1^2 dz = \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 \cdot [2\pi]^1 \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(11)

112. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} dx dy dz$, kde $\Omega : -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$.

Řešení Vztahy $-1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou x . Viz Obrázek 42.



Obrázek 42: $\Omega : -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic“. Transformační rovnice jsou tvaru

$$\begin{aligned}x &= x, \\ y &= \varrho \cos \varphi, \\ z &= \varrho \sin \varphi.\end{aligned}$$

11

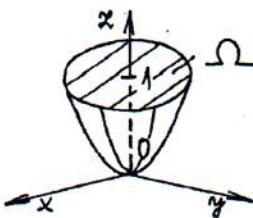
Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \varrho dx d\varrho d\varphi = \int_{-1}^1 dx \cdot \int_0^1 \varrho d\varrho \cdot \int_0^\pi d\varphi = [x]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

113. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.



Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle \varrho^2, 1 \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \varrho d\varrho d\varphi dz = \\ &= \iiint_{\Omega^*} \varrho^2 d\varrho d\varphi dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2 dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^2 [z]_{\varrho^2}^1 d\varphi \right) d\varrho = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^2 (1 - \varrho^2) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \varrho^2 (1 - \varrho^2) [\varphi]_0^{2\pi} d\varrho = 2\pi \left[\frac{1}{3} \varrho^3 - \frac{1}{5} \varrho^5 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

12

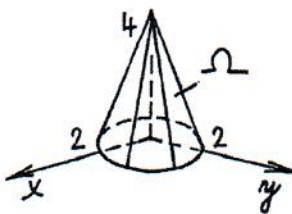
114. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, kde $\Omega : 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle 0, 4 - 2\varrho \rangle. \end{aligned}$$

12

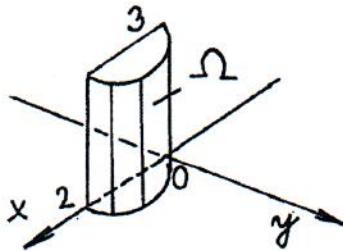
Obrázek 44: $\Omega : 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega^*} z \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{4-2\varrho} z \varrho \, dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{4-2\varrho} \varrho \, d\varphi \right) d\varrho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (4-2\varrho)^2 \varrho \, d\varphi \right) d\varrho = \pi \int_0^2 (4-2\varrho)^2 \varrho \, d\varrho = \frac{16}{3} \pi.\end{aligned}$$

115. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Řešení Vztah $x^2 + y^2 = 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Odtud a ze vztahů $z = 0, z = 3, y \leq 0$ plyne, že Ω je polovina válce. Viz Obrázek 45. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\begin{aligned}\varrho &\in \langle 0, 2 \cos \varphi \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ z &\in \langle 0, 3 \rangle.\end{aligned}$$

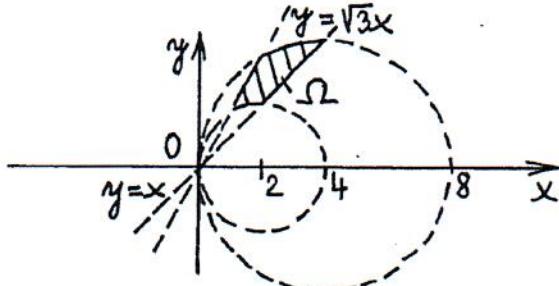
Obrázek 45: $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x = 0$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega^*} z \varrho^2 \, d\varrho \, d\varphi \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \left(\int_0^3 z \varrho^2 \, dz \right) d\varphi \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^3 \varrho^2 \, d\varphi \right) d\varphi = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = 8.\end{aligned}$$

13 Aplikace vícerozměrných integrálů

121. Příklad Spočtěte obsah rovinného obrazce M ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Řešení Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.



Obrázek 51: $M: y = x, y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce M určíme ze vztahu $S(M) = \iint_M dx dy$. Protože Ω je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \\ 4 \cos \varphi &\leq \rho \leq 8 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned}\iint_M dx dy &= \iint_{M^*} \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\rho^2]_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 24 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi d\varphi = 24 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 12 \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.\end{aligned}$$

122. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.

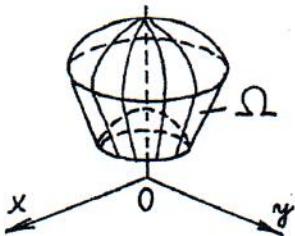
Řešení Oblast Ω je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned}\varrho &\in \langle 1, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \vartheta &\in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle.\end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \varrho^2 \sin \vartheta d\varrho d\varphi d\vartheta = \int_1^2 \varrho^2 d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

13

Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$

14

Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$.

Řešení Oblast Ω je ohrazena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protne. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - (x^2 + y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z-2)(z+3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicim $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\begin{aligned}\varrho &\in \langle 0, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle \varrho, 6 - \varrho^2 \rangle.\end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \varrho d\varrho d\varphi dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} d\varphi \right) d\varrho = \\ &= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3) d\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4 \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.\end{aligned}$$

Příklad Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x, y) \geq 0$.

Řešení Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$, kde M je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x$, $f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$

12. Príprad'te rovnice obrázkov.

2 (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

12 (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0\}$

4 (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \leq 1\}$

6 (d) Ohraničené plochami $z = 0$, $z = 3$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ a navíc $y \geq 0$

7 (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2; 0 \leq z \leq 1\}$

5 (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$

8 (g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \neq 0\}$

10 (h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$

11 (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$

13 (j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$

14 (k) $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ a $M_2 = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 1]$

3 (l) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1; z \geq 0; y^2 + z^2 \leq 1\}$

