

13. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Postup výpočtu $\int_M f(x) dx$

1. volba substituce
2. výpočet J_φ
3. určení $\phi^{-1}(M)$
4. ověření předpokladů vět (Fubinka a regularita)
5. výpočet integrálu $\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t)) |J_\varphi(t)| dt$

Příklady

1. $\int_M z d\lambda$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1, z > 0\}$
kužel, cylindrické
2. $\int_M \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
parabolický kužel
3. $\int_M (x^2 + y^2)z d\lambda$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$
kužel v kouli, sférické
4. $\int_M (x^4 + y^4)z d\lambda$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
válec v kouli, válcové
5. Spočtete objem tělesa (anuloid - torus) ohraničeného plochou: $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}$, $0 < b < a$.
donut
6. Spočtete objem tělesa určeného vztahy $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; x^2 + y^2 \leq 4y\}$
Vivianiho okénko, cylindrické

7. $\int_M x^2 + y^2 + z^2 \, d\lambda$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$, $a > 0$
kornout se zmrzlinou, sférické
8. Spočítejte míru mny M , kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$
položený válec
9. $\int_M z \, d\lambda$,
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$
kužel na podlaze
10. Spočítejte objem tělesa určeného vztahy: $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$
muffin, sférické
11. Spočítejte objem tělesa určeného vztahy: $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$
trochu jiný kornout se zmrzlinou

Nové příklady

12. Spočítejte míru množiny: $z\sqrt{x^2 + y^2} < 2; \sqrt{x^2 + y^2} < z + 1; z > 0$.
13. $\int_M \frac{x}{x^2 + y^2} \, d\lambda$, kde M je $0 < xz < x^2 + y^2 < 1, z > 0$.
14. $\int_M x^2 + y^2 + z^2 \, d\lambda$, kde M je $\frac{x^2 + y^2}{2} < z < \sqrt{3 - (x^2 + y^2)}$.
15. Spočítejte míru množiny: $x^2 + y^2 < 2 - z; x^2 + y^2 + z^2 < 2z$.
16. Spočítejte míru množiny: $8x^2 + 2y^2 < z < 4 - 8x^2 - 2y^2$.

