1 $\int_M z \, d\lambda$ $\qquad M: \; x^2+y^2 \le z^2 \le 1 \;, z \ge 0$

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

$$z = z \qquad \text{pak} \qquad 0 \le r^2 \le z^2 \le 1$$

$$\underset{\alpha}{\int_0^{2\pi}} \underset{z}{\int_0^{1}} \underset{r}{\int_0^{z}} z\cdot \overset{J_\varphi}{\overset{\downarrow}{r}} \, dr\, dz\, d\alpha = \int \int \frac{1}{2} z^3 \, dz\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8} z^4 \right]_0^1 d\alpha$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} 1 \, d\alpha = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

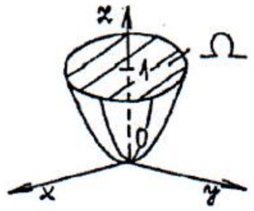
Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \varrho\, \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

2 **113. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.



Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\, \mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2\, [z]_{\varrho^2}^1\, \mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\, \mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\, [\varphi]_0^{2\pi}\, \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

114. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4 - 2\varrho\rangle.$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\, dt\,, \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojného integrálu.

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \sin s \\ y = r \sin t \sin s \\ z = r\cos s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ 0 \le s \le \pi\,.$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos t \sin s & \sin t \sin s & \cos s \\ -r\sin t \sin s & r\cos t \sin s & 0 \\ r\cos t\, sins & r\sin t \cos t & -r\sin s \end{pmatrix}\right| = r^2 \sin s\,,$$

dostaneme

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t\sin s, r\sin t \sin s, r\cos s)\cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds\,.$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \cos s \\ y = r \sin t \cos s \\ z = r\sin s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}\,,$$

pak ovšem vychází $|\det D\Phi| = r^2 \cos s$.

Příklad 8.17:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\}\,.$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \le r \le 3$, z dalších tří podmínek dostáváme $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le s \le \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,3\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos s}{\sqrt{r^2\cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s}} \cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$

$$= \int_1^3 r^2\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s\, ds = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3}\pi\,.$$

Příklad 8.18:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2) z\, dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le z^2,\ z \ge 0,\}\,.$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \le r \le 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2 \sin^2 s \le r^2 \cos^2 s$, neboli $|\operatorname{tg} s| \le 1$, což spolu s třetí podmínkou dává $0 \le s \le \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou t není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

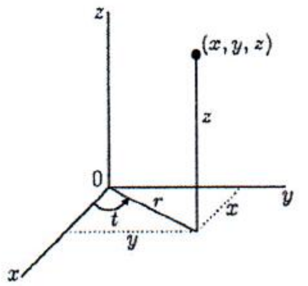
$$\iiint_\Omega (x^2+y^2) z\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} (r^2\cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s)\cdot r\cos s \cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$

$$= \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} r^5 \sin^3 s \cos s\, dr\, dt\, ds = \underbrace{\int_1^2 r^5\, dr}_{=\frac{21}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s \cos s\, ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4}\pi\,.$$

kde

$$r \geqq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a} \quad z^* \in \mathbb{R}.$$



Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r.$$

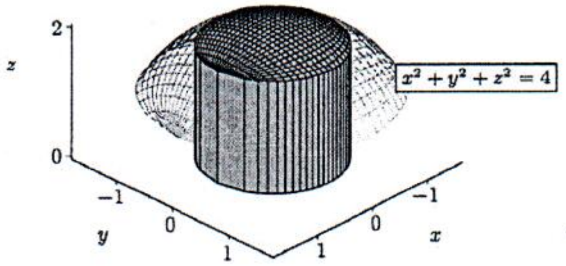
Poznámka 2.20. Substituci do cylindrických souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice půdorysu tělesa Ω, přes které integrujeme, obsahuje části kružnic. Samozřejmě, že vhodnost či nevhodnost substituce ovlivňuje také samotná integrovaná funkce.

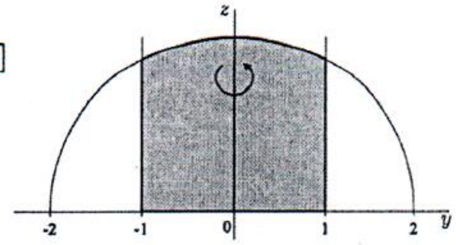
4

Příklad 2.21. Vypočtěte integrál $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^4 + y^4)\, z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 \leqq 1 \ \wedge\ z \geqq 0 \ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4\right\}.$$

Řešení. Množina Ω je válec „seříznutý" shora kulovou plochou.





Zavedeme-li válcové souřadnice

$$x = r \cos t,$$
$$y = r \sin t,$$
$$z = z,$$

4. obdržíme omezení

$$0 \leqq r \leqq 1, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq z \leqq \sqrt{4 - r^2}.$$

Podle věty 2.18 tedy platí

$$I = \iiint\limits_{M_{rtz}} \left(r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t\right) z \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}z,$$

kde

$$M_{rtz} = \left\{(r, t, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leqq r \leqq 1 \ \wedge\ 0 \leqq t \leqq 2\pi \ \wedge\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{4 - r^2}\right\}.$$

Užijeme-li nyní Fubiniovy věty (2.10 a 1.22), dostaneme

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} \left(r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t\right) z \cdot r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \int_0^1 \left(r^5 \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \,\mathrm{d}z \right) \right) \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \left(r^5 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} \right) \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4r^5 - r^7\right) \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2r^6}{3} - \frac{r^8}{8}\right]_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{24} =$$

$$= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t\right) \mathrm{d}t = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4}\right) \mathrm{d}t = \frac{13}{48} \left[\frac{3}{4} t + \frac{\sin 4t}{16}\right]_0^{2\pi} = \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{13}{32} \pi.$$

▲

Poznámka 2.22. Rozmyslete si, že substitucí do cylindrických souřadnic a Fubiniovou větou dostaneme totéž, jako užitím Fubiniovy věty a následné substituce do polárních souřadnic v příslušném dvojném integrálu.

Poznámka 2.29. V předchozím příkladu bychom také mohli postupovat tak, že bychom (pro vhodná a, b) zavedli tzv. zobecněné cylindrické souřadnice, tj.

$$\begin{aligned} x &= a \cdot r\cos t, \\ y &= b \cdot r\sin t, \\ z &= z^{*}(= z), \end{aligned}$$

kde

$$r \geqq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{a} \quad z^{*} \in \mathbb{R}.$$

Jacobián tohoto zobrazení je

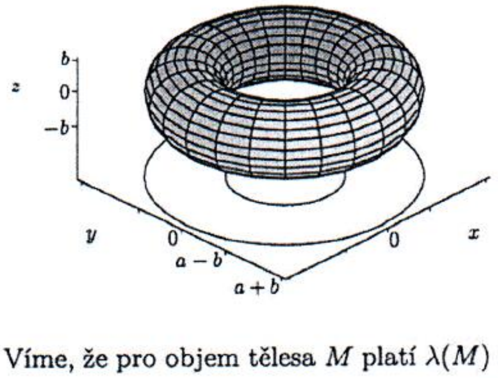
$$J(r, t, z^{*}) = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t & 0 \\ b\sin t & br\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cdot r\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = ab \cdot r.$$

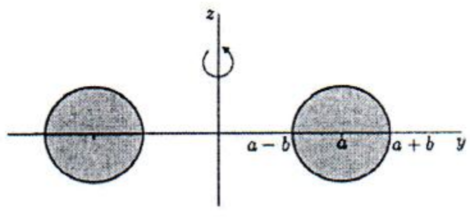
Domácí cvičení 2.30. Pokuste se vyřešit příklad 2.28 pomocí zobecněných cylindrických souřadnic (viz poznámka 2.29).

5 **Příklad 2.31.** Vypočtěte objem tělesa M ohraničeného plochou (anuloidem)

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a).$$

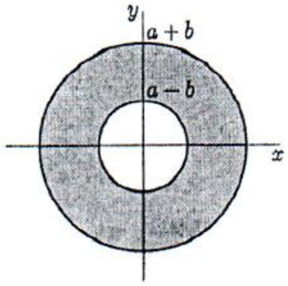
Řešení.





Víme, že pro objem tělesa M platí $\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$. Řezem tělesa M rovinou $z = 0$ je mezikruží znázorněné na obrázku níže.

5



Pro výpočet $\lambda(M)$ bude tedy vhodné použít v příslušném integrálu transformaci do cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M v těchto nových (cylindrických) souřadnicích popíšeme podmínkami (promyslete to!)

$$t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad r \in \langle a-b, a+b\rangle, \quad z \in \left\langle -\sqrt{b^2-(r-a)^2}, \sqrt{b^2-(r-a)^2} \right\rangle.$$

Proto (vzhledem ke větám 1.22, 2.10 a 2.18) pro objem tělesa M platí

$$\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r\sqrt{b^2-(r-a)^2}\,\mathrm{d}r = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ r - a = u \\ \mathrm{d}r = \mathrm{d}u \\ a-b \mapsto -b \\ a+b \mapsto b \end{array} \right| = 4\pi \int_{-b}^{b} (u+a)\sqrt{b^2-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= 4\pi \int_{-b}^{b} \underbrace{u\sqrt{b^2-u^2}}_{\text{lichá v } u} \mathrm{d}u + 4\pi a \int_{-b}^{b} \underbrace{\sqrt{b^2-u^2}}_{\text{sudá v } u} \mathrm{d}u = 8\pi a \int_0^b \sqrt{b^2-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ u = b\sin s \\ \mathrm{d}u = b\cos s\,\mathrm{d}s \\ 0 \mapsto 0,\ b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - b^2\sin^2 s} \cdot b\cos s\,\mathrm{d}s = 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\,\mathrm{d}s =$$

$$= 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2s}{2}\,\mathrm{d}s = 8\pi ab^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2s}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \right) = 2\pi^2 ab^2.$$

Viviani

(6) $x^2+y^2+z^2 \le 16$

$x^2+y^2 \le 4y$

$x^2+(y-2)^2 \le 4$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$J_\varphi = r$

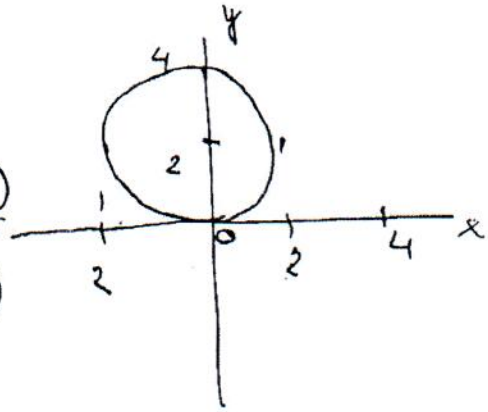
$r^2+z^2 \le 16$

$0 \le r^2 \le 4r\sin\varphi$

$0 \le r \le 4\sin\varphi$

$\varphi \in (0, \pi)$

$r \in (0, \sin\varphi)$



$z^2 \le 16 - r^2$

$-\sqrt{16-r^2} \le z \le \sqrt{16-r^2}$

mne je sym. přes osu z, tedy

$$2\int_0^\pi\int_0^{4\sin\varphi}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz\,dr\,d\varphi = 2\int_0^\pi\int_0^{4\sin\varphi} r\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\varphi =$$

$\varphi \quad r \quad z$

$$= 2\int_0^\pi \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^\pi -\frac{1}{3}\big(\overbrace{16-16\sin^2\varphi}^{16\cos^2\varphi}\big)^{3/2} + \frac{1}{3}(16)^{3/2}\,d\varphi$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^\pi 64(\cos^2)^{3/2} - 64\,d\varphi \overset{?}{=} -\frac{64\cdot 2}{3}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi - 64\,d\varphi$$

$$= -\frac{256}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi(1-\sin^2\varphi)-1 = -\frac{256}{3}\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{256}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

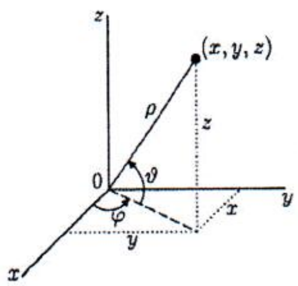
2.3.4 Substituce do sférických souřadnic

Uvažujme zobrazení

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\varphi \cos\vartheta, \\
y &= \rho \sin\varphi \cos\vartheta, \\
z &= \rho \sin\vartheta,
\end{aligned}
$$

kde

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$
$$\vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$



Nyní přímým výpočtem (rozvojem podle posledního řádku) určíme Jacobián tohoto zobrazení. Platí

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\cos\vartheta & -\rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\vartheta \left(\rho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right) + \rho\cos\vartheta\left(\rho\cos^2\vartheta\right) = \rho^2\cos\vartheta\left(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right) = \rho^2\cos\vartheta.$$

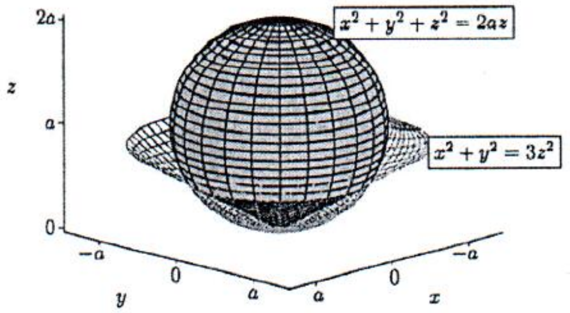
Poznámka 2.23. Pro substituci do sférických souřadnic se zpravidla rozhodneme, pokud hranice tělesa Ω, přes které integrujeme, obsahuje části kulových ploch.

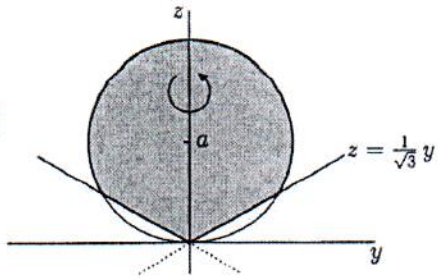
7 **Příklad 2.24.** Pro $a > 0$ vypočtěte integrál $I_a = \iiint\limits_{\Omega_a} (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

$$\Omega_a = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az \ \wedge\ x^2 + y^2 \leqq 3z^2\right\}.$$

Řešení. Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az$ lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqq a^2$. Množina Ω_a je tedy průnikem koule (se středem v bodě $(0, 0, a)$ a poloměrem a) a rotačního kužele (viz obrázek).

7





Zaveďme sférické souřadnice

$$x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta,$$
$$y = \rho\sin\varphi\cos\vartheta,$$
$$z = \rho\sin\vartheta.$$

Uvědomme si ještě jednou, že

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle \quad \text{a} \quad \vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$

Dosazením transformačních vztahů do podmínek

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 \leqq 3z^2$$

obdržíme

$$\rho^2 \leqq 2a\rho\sin\vartheta \;\wedge\; \rho^2\cos^2\vartheta \leqq 3\rho^2\sin^2\vartheta,$$

odkud dostaneme ($\rho \geqq 0$)

$$\rho \leqq 2a\sin\vartheta \;\wedge\; \cos^2\vartheta \leqq 3\sin^2\vartheta.$$

Z první nerovnosti obdržíme $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a z druhé následně $\cos\vartheta \leqq \sqrt{3}\sin\vartheta$. Celkem tedy máme

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad \vartheta \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}\rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2a\sin\vartheta\rangle.$$

Z vět 2.18, 2.10 a 1.22 pak plyne

$$I_a = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\sin\vartheta}\rho^2\cdot\rho^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{2a\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\cdot 2^5\cdot a^5\cdot\sin^5\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \left|\begin{array}{c}\text{substituce}\\ \sin\vartheta = u\\ \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}u\\ \frac{\pi}{6}\mapsto\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}\mapsto 1\end{array}\right| = \frac{2\pi}{5}\cdot 32a^5\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^5\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{64}{5}\pi a^5\left[\frac{u^6}{6}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{64}{5}\pi a^5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right) = \frac{21}{10}\pi a^5.$$

▲

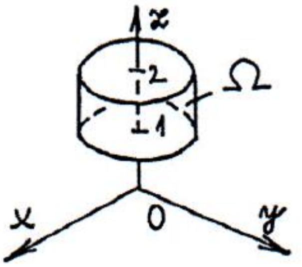
12 Trojný integrál - Transformace integrálů

111. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: 1 \le z \le 2, x^2+y^2 \le 1$.

Řešení Integrační obor Ω určený vztahy $1 \le z \le 2, x^2+y^2 \le 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0,1 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0,2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle 1,2 \rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.



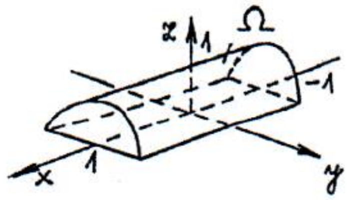
Obrázek 41: $\Omega: 1 \le z \le 2, x^2+y^2 \le 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi)\cdot\varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

112. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2+z^2 \le 1$.

(8)

Řešení Vztahy $-1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2+z^2 \le 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou x. Viz Obrázek 42.



Obrázek 42: $\Omega: -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2+z^2 \le 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic“. Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$
$$y = \varrho\cos\varphi,$$
$$z = \varrho\sin\varphi.$$

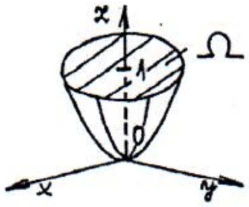
8 Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \varrho\, \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

113. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.



Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\, \mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2\, [z]_{\varrho^2}^1\, \mathrm{d}\varphi)d\varrho =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\, \mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\, [\varphi]_0^{2\pi}\, \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

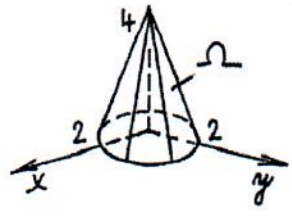
9 **114. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4 - 2\varrho\rangle.$$

9



Obrázek 44: $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$

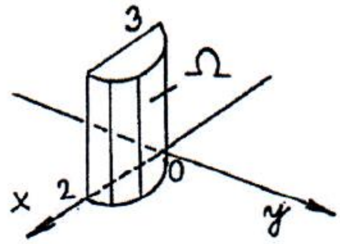
$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{4-2\varrho} z\varrho\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-2\varrho} \varrho\,\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (4-2\varrho)^2 \varrho\,\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho = \pi \int_0^2 (4-2\varrho)^2 \varrho\,\mathrm{d}\varrho = \frac{16}{3}\pi.$$

115. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2};\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 0, z = 3, y \ge 0, x^2+y^2-2x = 0$.

Řešení Vztah $x^2+y^2 = 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2+y^2 = 1$. Odtud a ze vztahů $z = 0, z = 3, y \le 0$ plyne, že Ω je polovina válce. Viz Obrázek 45. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 2\cos\varphi\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 3\rangle.$$



Obrázek 45: $\Omega : z = 0, z = 3, y \ge 0, x^2+y^2-2x = 0$

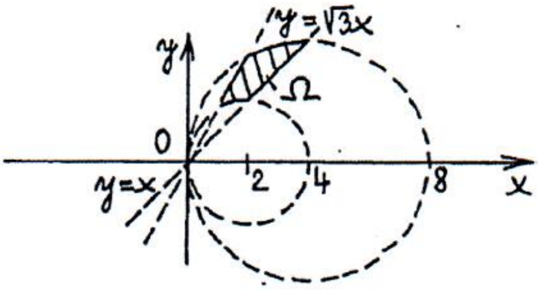
$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \Big(\int_0^3 z\varrho^2\,dz\Big)d\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^3 \varrho^2\,d\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 8.$$

13 Aplikace vícerozměrných integrálů

121. Příklad Spočtěte obsah rovinného obrazce M ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

Řešení Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.



Obrázek 51: $M\colon y = x,\ y = \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = 8x.$

Obsah obrazce M určíme ze vztahu $S(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Protože Ω je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$
$$4\cos\varphi \le \varrho \le 8\cos\varphi.$$

Platí

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\varrho^2\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.$$

122. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahy $x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$.

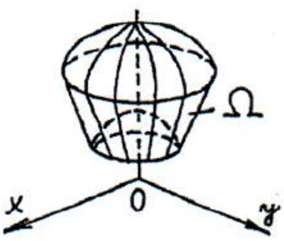
10 **Řešení** Oblast Ω je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Objem tělesa Ω určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3}\cdot 2\pi \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2-\sqrt{2}).$$

10



Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$

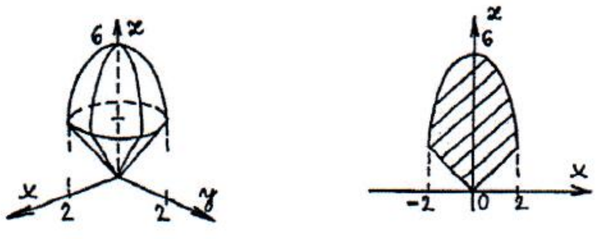
11

123. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 6 - (x^2 + y^2)$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - (x^2 + y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z - 2)(z + 3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicím $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\varrho \in \langle 0, 2 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle \varrho, 6 - \varrho^2 \rangle.$$

Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.



Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 6 - (x^2 + y^2)$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho \,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} \mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho =$$
$$= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3)\mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

124. Příklad Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x, y) \ge 0$.

Řešení Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je kruh $x^2 + y^2 \le 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$

1. Rozviňte v řadu integrál $\int_0^\infty \cos x \, \log(1+e^{-x})\,dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos x\,\log(1+e^{-x})\,dx &= \int_0^\infty \Big(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{e^{-kx}\cos x}{k}\Big)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty (-1)^{k+1}\frac{e^{-kx}\cos x}{k}\,dx\\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}.\end{aligned}$$

Odůvodnění záměny podle kritéria "$\sum\int|f_k|<\infty$":

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \Big|(-1)^{k+1}\frac{e^{-kx}\cos x}{k}\Big|\,dx \le \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{k}\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty.$$

2. Spočtěte integrál

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}\,dx.$$

Řešení. Pro $a<0$ je integrand nedefinován na intervalu, tudíž integrál nemá smysl. $F(0)=0$. Pro $a>0$ máme

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+ax^2)(1+x^2)}\,dx. \tag{1}$$

Odůvodnění: Podmínka měřitelnosti je splněna. Majoranta $\frac{1}{1+x^2}$, pro $a=1$ máme

$$\frac{\log(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} \le \frac{1}{x^2+1},$$

takže integrál konverguje aspoň v jednom bodě (bod $a=0$ se nedá použít, protože není v sledovaném intervalu). Integrand v (1) je spojitý, takže ta samá majoranta dává i spojitost derivace v $(0,\infty)$. Počítáme

$$(a-1)F'(a) = \int_0^\infty \Big(\frac{a}{1+ax^2} - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = \frac{\pi}{2}(\sqrt{a}-1),$$

tedy

$$F'(a) = \frac{\pi/2}{\sqrt{a}+1} \tag{2}$$

platí pro $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Jak už jsme zmínili, F' je spojitá v 1, takže (2) platí i pro $a=1$. Odtud $F(a)=\pi\big(\sqrt{a}-\log(1+\sqrt{a})\big)+C$. Jelikož F je spojitá v $0+$ (majoranta $\frac{\log(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$ pro $a\in[0,1]$) a přímý výpočet dává $F(0)=0$, máme

$$F(a) = \pi\Big(\sqrt{a}-\log(1+\sqrt{a})\Big), \quad a\ge 0.$$

12 **3. Spočtěte míru množiny:**

$$M = \Big\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 :\ z\sqrt{x^2+y^2} < 2,\ \sqrt{x^2+y^2} < z+1,\ z>0\Big\}.$$

12 *Řešení.* Ve válcových souřadnicích:

$$\lambda_3(M) = \int\limits_{\substack{0<hr<2\\ 0<r<h+1\\ -\pi\le\alpha<\pi}} r\,dr\,dh\,d\alpha = 2\pi\int_0^1\Big(\int_0^{h+1} r\,dr\Big)\,dh + 2\pi\int_1^\infty\Big(\int_0^{2/h} r\,dr\Big)\,dh$$

$$= \pi\int_0^1 (h^2+2h+1)\,dh + \pi\int_1^\infty \frac{4}{h^2}\,dh = \pi\Big(\frac{1}{3}+1+1+4\Big) = \frac{19}{3}\,\pi.$$

---

1. Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n}\sin\frac{x}{n}\,dx$.

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}\sin\frac{x}{n}\,dx$$

$$= \int_0^\infty\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(n\sin\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}\Big)\,dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \Gamma(2) = 1.$$

Záměna podle Lebesgueovy věty. Pokud $n\ge 3$, pak $\binom{n}{3}\ge\frac{n^3}{27}$ a tudíž podle binomické věty $(1+\frac{x}{n})^n \ge 1+\frac{x^3}{27}$. Dále $\sin\frac{x}{n}\le\frac{x}{n}$. Tedy majoranta integrandu je

$$\frac{27\,x}{27+x^3}.$$

2. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-a^2x^2}}{x^2}\,dx.$$

Řešení. Máme

$$F'(a) = \int_0^\infty 2a\,e^{-a^2x^2}\,dx = 2\,\mathrm{sgn}\,a\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \pm\sqrt{\pi}\qquad (t=|a|\,x,\ a\ne 0).$$

Podmínka měřitelnosti je splněna. Integrál konverguje pro všechna $a\in\mathbb{R}$: U nuly má integrand vlastní limitu a^2, u nekonečna je odhadnutý $1/x^2$. Majoranta pro derivaci $2qe^{-p^2x^2}$ pro $p<|a|<q$, $q>p>0$. Máme

$$F(a) = \sqrt{\pi}\,a + C_1,\quad a>0;\quad F(a) = -\sqrt{\pi}\,a + C_2,\quad a<0.$$

Přímým výpočtem dostaneme $F(0)=0$. Abychom odtud učinili závěr, že $F(a) = \sqrt{\pi}|a|$, $a\in\mathbb{R}$, musíme ještě ověřit spojitost F aspoň v nule. Majoranta pro spojitost je $\frac{1-e^{-q^2x^2}}{x^2}$ pro $|a|<q$, $q>0$.

3. Spočtěte integrál $\int_M \frac{x\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2}$, **kde**

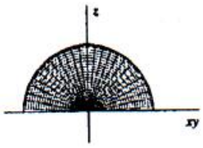
13

$$M = \big\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : 0<xz<x^2+y^2<1,\ z>0\big\}.$$

Řešení. Ve válcových souřadnicích ($x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, $z=h$, Jakobián r) uvážíme, že podmínka $h\cos\alpha>0$ dává omezení $|\alpha|<\pi/2$. Máme

$$\int_M\frac{x\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2} = \int\limits_{\substack{0<h\cos\alpha<r<1\\ -\pi/2<\alpha<\pi/2}} \cos\alpha\,dr\,dh\,d\alpha$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{r/\cos\alpha}\cos\alpha\,dh\Big)\,dr\Big)\,d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^1 r\,dr\Big)\,d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$



Těžiště $T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad m = V$,

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3, \quad M_{xy} = \iiint_W z \, dx \, dy \, dz =$$

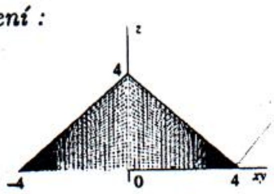
$$= \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r\sin\vartheta \, r^2 \cos\vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{2}, \qquad T = [0, 0, \frac{3}{8}a]. \qquad \blacksquare$$

u zk.

Příklad 343. Určete těžiště kužele se základnou $x^2 + y^2 \le 16$ a vrcholem v bodě $[0, 0, 4]$, je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = [0, 0, z_T], \text{ kde } z_T = \frac{M_{xy}}{m}, m = V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64}{3}\pi.$$

$$M_{xy} = \iiint_W z \, dx \, dy \, dz$$

Uvažovaný kužel je rotační, osa z je jeho osou rotace. Meridiánem tohoto rotačního kužele je část přímky $x + z = 4 \longrightarrow z = 4 - x$. Potom rovnice kuželové plochy je $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

$$M_{xy} = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 16} \left(\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z \, dz \right) dx \, dy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 16} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dx \, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{x^2+y^2 \le 16} \left(4 - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 dx \, dy = \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r \le 4 \\ J = r & \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^4 (4-r)^2 r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \int_0^4 (16r - 8r^2 + r^3) \, dr = \pi \left[8r^2 - \frac{8}{3}r^3 + \frac{r^4}{4} \right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi,$$

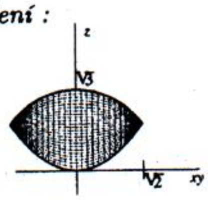
$$T = [0, 0, 1]. \qquad \blacksquare$$

14

Příklad 344. Určete moment setrvačnosti vzhledem k bodu $[0, 0, 0]$ tělesa W

$$W = \left\{ [x, y, z] \in E_3; \quad \frac{x^2 + y^2}{2} \le z \le \sqrt{3 - x^2 - y^2} \right\}, \quad \varrho = 1.$$

Řešení :



$$I_{[0,0,0]} = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi & \frac{r^2}{2} \le h \le \sqrt{3 - r^2} \longrightarrow \frac{r^2}{2} \le \sqrt{3 - r^2} \longrightarrow r^4 \le 4(3 - r^2) \longrightarrow \\ y = r\sin\varphi & r^4 + 4r^2 - 12 \le 0 \longrightarrow (r^2 - 2)(r^2 + 6) \le 0 \longrightarrow \quad r^2 \le 2 \longrightarrow \\ z = h & 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right] =$$

14.

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt2}\Big(\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} (r^2+h^2)r\,dh\Big)\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt2}\Big[r^3h + r\frac{h^3}{3}\Big]_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt2}\Big(r^3\sqrt{3-r^2}+\frac{r}{3}(3-r^2)\sqrt{3-r^2}-\frac{r^5}{2}-\frac{r^7}{24}\Big)\,dr = 2\pi\Big[-\frac{r^6}{12}-\frac{r^8}{24\cdot 8}\Big]_0^{\sqrt2} +$$

$$+ 2\pi\int_0^{\sqrt2}\Big(r\sqrt{3-r^2}+\frac{2}{3}r^3\sqrt{3-r^2}\Big)\,dr = 2\pi\Big(-\frac{8}{12}-\frac{16}{24\cdot 8}\Big)-$$

$$-\pi\int_0^{\sqrt2}\sqrt{3-r^2}\Big(1+\frac{2}{3}r^2\Big)(-2r)\,dr = \left[\begin{array}{ll} 3-r^2=t & |\;\; r_1=0\to t_1=3 \\ -2r\,dr=dt & \;\;\; r_2=\sqrt2\to t_2=1 \end{array}\right] =$$

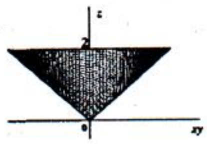
$$= -\frac{3}{2}\pi-\pi\int_3^1\sqrt{t}\Big(1+\frac{2}{3}(3-t)\Big)\,dt = -\frac{3}{2}\pi+\pi\int_1^3\Big(3\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big)\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\pi+\pi\Big[\frac{2\cdot 3t^{3/2}}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2t^{5/2}}{5}\Big]_1^3 = -\frac{3}{2}\pi+\pi\Big(2\cdot3\sqrt3-\frac{4}{15}\cdot 9\sqrt3-2+\frac{4}{15}\Big) =$$

$$= \pi\Big(\frac{18\sqrt3}{5}-\frac{97}{30}\Big) \doteq 3{,}002\,\pi.$$ ■

***Příklad* 345.** Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa W,
$$W=\{[x,y,z]\in E_3;\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\},\ \varrho=1.$$

Řešení :



$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

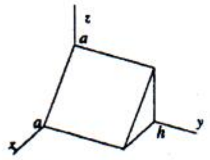
$$= \iint_{x^2+y^2\le 4}\Big((x^2+y^2)\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\Big(2-\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{ll} x=r\cos\varphi & |\;\; 0\le r\le 2 \\ y=r\sin\varphi & \;\;\; 0\le\varphi\le 2\pi \\ J=r & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(2-r)r\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\Big[2\cdot\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\Big]_0^2 = 2\pi\Big(8-\frac{32}{5}\Big) = \frac{16\pi}{5}.$$ ■

***Příklad* 346.** Určete statický moment M_{yz} (vzhledem k rovině (yz)) tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=a,\ y=h,\ (a>0,h>0)$, je-li hustota ϱ konstantní.

Řešení :



$$M_{yz} = \varrho\cdot\iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} W: & 0\le z\le a-x \\ & 0\le x\le a \\ & 0\le y\le h \end{array}\right] =$$

$$= \varrho\int_0^a\Big(\int_0^h\Big(\int_0^{a-x} x\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \varrho\int_0^a\Big(\int_0^h x(a-x)\,dy\Big)\,dx = \varrho\cdot h\Big[a\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^a =$$

$$= \frac{\varrho h a^3}{6}.$$ ■

***Příklad* 347.** Určete moment setrvačnosti I_{xy} (vzhledem k rovině (xy)) tělesa W,
$$W=\{[x,y,z]\in E_3; x^2-2x+y^2\le 0,\ -1\le z\le 1\},\ \varrho=1.$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2)^2 \le z^3\}$.

Výsledek: $\pi/28$

Příklad 1.114. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2)^2 \le xy \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0\}$.

Výsledek: $\pi/120$

Příklad 1.115. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \ge 1 \wedge x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$.

Výsledek: $13\pi/10$

Příklad 1.116. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2 \wedge x^2+y^2 \le 1-z \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0\}$.

Výsledek: $\pi/16$

Příklad 1.117. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W z\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4 \wedge z \ge 1\}$.

Výsledek: $9\pi/4$

Příklad 1.118. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W y\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \ge 1 \wedge z \le 1 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \le z \wedge y \ge 0\right\}$.

Výsledek: $7/24 - \pi/16$

Příklad 1.119. *Vypočítejte trojný integrál*

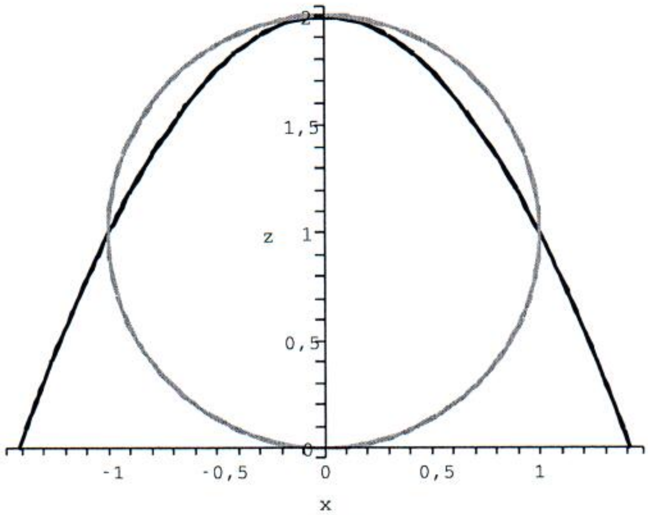
$$\int_W y\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \ge x \wedge 0 \le z \le 2x-x^2-y^2 \wedge y \ge 0\}$.

Výsledek: $13/60$

15 **Příklad 1.120.** *Vypočítejme objem tělesa určeného nerovnicemi* $x^2+y^2 \le 2-z$ *a* $x^2+y^2+z^2 \le 2z$.

15



Obr. 22

Řešení: Těleso můžeme popsat jako množinu

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \wedge x^2 + y^2 \leq 2 - z\}.$$

Objem množiny (míru množiny) W pak vypočítáme jako

$$\mu(W) = \int_W \mathrm{d}V.$$

Těleso, jehož objem počítáme, je průnik koule a rotačního paraboloidu. Řez tělesa rovinou $y = 0$ je na Obr. 22.

Z geometrie víme, že obě plochy jsou rotační a mají společnou osu. Proto jejich průnikem je kružnice. Řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 &=& 2z, \\ x^2 + y^2 &=& 2 - z, \end{array}$$

zjistíme, že kružnice průniku leží v rovinách o rovnicích $z = 2$ a $z = 1$ s tím, že kružnice v rovině $z = 2$ se redukuje na bod o souřadnicích $(0, 0, 2)$ a v rovině $z = 1$ je průnikem kružnice, jejíž kolmý průmět do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$. Celé těleso se tedy promítne do roviny xy jako kruh M: $x^2 + y^2 \leq 1$. Pro libovolné $(x, y, z) \in W$ je tedy

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$$

15

Užitím Fubiniovy věty pro trojný integrál pak dostaneme

$$\Omega = \int\limits_W \mathrm{d}V = \int\limits_M \left(\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A =$$

$$= \int\limits_M \left((1 - \sqrt{1-x^2-y^2}) - (2 - x^2 - y^2) \right) \mathrm{d}A =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \left(r - r^3 + r\sqrt{1-r^2} \right) \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi = \frac{7}{6}\pi.$$

Pro výpočet dvojného integrálu jsme použili substituci do polárních souřadnic (4).

V příkladech 1.121 – 1.125 vypočítejte objemy daných těles.

Příklad 1.121. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$. ***Výsledek:*** 8/3

Příklad 1.122. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$. ***Výsledek:*** 7/12

Příklad 1.123. *Těleso je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, *přičemž* $z \geq 0$ *a* $0 < a < b$. ***Výsledek:*** $(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)\pi/3$

Příklad 1.124. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. ***Výsledek:*** $32\pi/3$

Příklad 1.125. *Těleso je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$. ***Výsledek:*** $80\pi/3$

Fyzikální aplikace trojného integrálu

Nechť W je trojrozměrné těleso, jehož hustota v každém bodě (x, y, z) je $h(x, y, z)$.

(I) Hmotnost tohoto tělesa je

$$m = \int\limits_W h(x, y, z)\, \mathrm{d}V\ . \tag{17}$$

(II) Statický moment tohoto tělesa vzhledem k rovině xy, resp. vzhledem k rovině xz, resp. vzhledem k rovině yz

$$S_{xy} = \int\limits_W z h(x, y, z)\, \mathrm{d}V,\ S_{xz} = \int\limits_W y h(x, y, z)\, \mathrm{d}V,\ S_{yz} = \int\limits_W x h(x, y, z)\, \mathrm{d}V. \tag{18}$$

16 $K: \; 8x^2 + 2y^2 \le z \le 4 - 8x^2 - 2y^2$

Zob. Válcové souřadnice:

$$x = \frac{1}{\sqrt{8}} r \cos\alpha$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\alpha$$
$$z = z$$

pak $\; r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha \le z \le 4 - r^2\cos^2\alpha - r^2\sin^2\alpha$

$$r^2 \le z \le 4 - r^2$$

$r \in (0, \sqrt{2})$

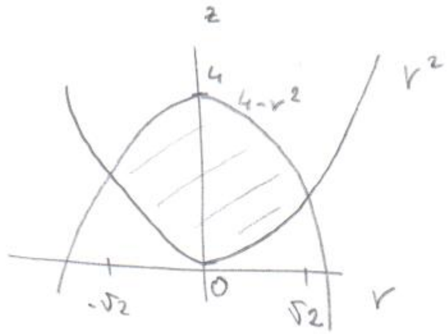
$\alpha \in (0, 2\pi)$

$z \in (r^2, 4 - r^2)$

$2r^2 = 4$

$r^2 = 2$

$r = \pm\sqrt{2}$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{4-r^2} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} \cdot r \; dz\, dr\, d\alpha = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\left(4 - r^2 - r^2\right) dr\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\alpha = \frac{1}{4}\cdot 2\pi \left(4 - 2\right) = \underline{\underline{\pi}}$$