1. Rozviňte v řadu integrál $\int_0^\infty \cos x \log(1+e^{-x})\,dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos x \log(1+e^{-x})\,dx &= \int_0^\infty \Big(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{e^{-kx}\cos x}{k}\Big)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty (-1)^{k+1}\frac{e^{-kx}\cos x}{k}\,dx\\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}.\end{aligned}$$

Odůvodnění záměny podle kritéria "$\sum \int |f_k| < \infty$":

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \Big|(-1)^{k+1}\frac{e^{-kx}\cos x}{k}\Big|\,dx \le \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{k}\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty.$$

2. Spočtěte integrál

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}\,dx.$$

Řešení. Pro $a<0$ je integrand nedefinován na intervalu, tudíž integrál nemá smysl. $F(0)=0$. Pro $a>0$ máme

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+ax^2)(1+x^2)}\,dx. \tag{1}$$

Odůvodnění: Podmínka měřitelnosti je splněna. Majoranta $\frac{1}{1+x^2}$, pro $a=1$ máme

$$\frac{\log(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} \le \frac{1}{x^2+1},$$

takže integrál konverguje aspoň v jednom bodě (bod $a=0$ se nedá použít, protože není v sledovaném intervalu). Integrand v (1) je spojitý, takže ta samá majoranta dává i spojitost derivace v $(0,\infty)$. Počítáme

$$(a-1)F'(a) = \int_0^\infty \Big(\frac{a}{1+ax^2} - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = \frac{\pi}{2}(\sqrt{a}-1),$$

tedy

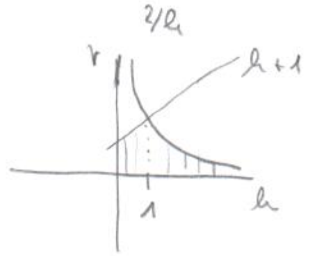
$$F'(a) = \frac{\pi/2}{\sqrt{a}+1} \tag{2}$$

platí pro $a \in (0,\infty)\setminus\{1\}$. Jak už jsme zmínili, F' je spojitá v 1, takže (2) platí i pro $a=1$. Odtud $F(a) = \pi\big(\sqrt{a} - \log(1+\sqrt{a})\big) + C$. Jelikož F je spojitá v $0+$ (majoranta $\frac{\log(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$ pro $a\in[0,1]$) a přímý výpočet dává $F(0)=0$, máme

$$F(a) = \pi\Big(\sqrt{a} - \log(1+\sqrt{a})\Big), \quad a \ge 0.$$

3. Spočtěte míru množiny:

$$M = \Big\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 :\ z\sqrt{x^2+y^2} < 2,\ \sqrt{x^2+y^2} < z+1,\ z>0\Big\}.$$



Řešení. Ve válcových souřadnicích:

$$\lambda_3(M) = \int\limits_{\substack{0<hr<2\\ 0<r<h+1\\ -\pi\le\alpha<\pi}} r\,dr\,dh\,d\alpha = 2\pi\int_0^1\Big(\int_0^{h+1} r\,dr\Big)\,dh + 2\pi\int_1^\infty\Big(\int_0^{2/h} r\,dr\Big)\,dh$$

$$= \pi\int_0^1 (h^2+2h+1)\,dh + \pi\int_1^\infty \frac{4}{h^2}\,dh = \pi\Big(\frac{1}{3}+1+1+4\Big) = \frac{19}{3}\,\pi.$$

---

1. Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n}\sin\frac{x}{n}\,dx$.

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}\sin\frac{x}{n}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \Big(\lim_{n\to\infty}\Big(n\sin\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}\Big)\,dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \Gamma(2) = 1.$$

Záměna podle Lebesgueovy věty. Pokud $n\ge 3$, pak $\binom{n}{3}\ge\frac{n^3}{27}$ a tudíž podle binomické věty $(1+\frac{x}{n})^n \ge 1+\frac{x^3}{27}$. Dále $\sin\frac{x}{n}\le\frac{x}{n}$. Tedy majoranta integrandu je

$$\frac{27x}{27+x^3}.$$

2. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-a^2x^2}}{x^2}\,dx.$$

Řešení. Máme

$$F'(a) = \int_0^\infty 2a\,e^{-a^2x^2}\,dx = 2\operatorname{sgn} a\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \pm\sqrt{\pi} \qquad (t=|a|\,x,\ a\ne 0).$$

Podmínka měřitelnosti je splněna. Integrál konverguje pro všechna $a\in\mathbb{R}$: U nuly má integrand vlastní limitu a^2, u nekonečna je odhadnutý $1/x^2$. Majoranta pro derivaci $2qe^{-p^2x^2}$ pro $p<|a|<q$, $q>p>0$. Máme

$$F(a) = \sqrt{\pi}\,a + C_1,\quad a>0;\quad F(a) = -\sqrt{\pi}\,a + C_2,\quad a<0.$$

Přímým výpočtem dostaneme $F(0)=0$. Abychom odtud učinili závěr, že $F(a) = \sqrt{\pi}|a|$, $a\in\mathbb{R}$, musíme ještě ověřit spojitost F aspoň v nule. Majoranta pro spojitost je $\frac{1-e^{-q^2x^2}}{x^2}$ pro $|a|<q$, $q>0$.

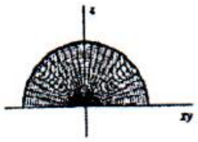
3. Spočtěte integrál $\int_M \frac{x\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2}$, kde

$$M = \big\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : 0<xz<x^2+y^2<1,\ z>0\big\}.$$

Řešení. Ve válcových souřadnicích ($x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, $z=h$, Jakobián r) uvážíme, že podmínka $h\cos\alpha>0$ dává omezení $|\alpha|<\pi/2$. Máme

$$\int_M \frac{x\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2} = \int\limits_{\substack{0<h\cos\alpha<r<1\\ -\pi/2<\alpha<\pi/2}} \cos\alpha\,dr\,dh\,d\alpha$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{r/\cos\alpha}\cos\alpha\,dh\Big)\,dr\Big)\,d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^1 r\,dr\Big)\,d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$



Těžiště $T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad m = V$,

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3, \quad M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz =$$

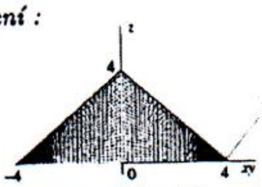
$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r\sin\vartheta\, r^2\cos\vartheta\,dr\right)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{2}, \qquad T = [0, 0, \frac{3}{8}a]. \qquad \blacksquare$$

Uzk.

Příklad 343. Určete těžiště kužele se základnou $x^2 + y^2 \le 16$ a vrcholem v bodě $[0, 0, 4]$, je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = [0, 0, z_T], \text{ kde } z_T = \frac{M_{xy}}{m}, m = V = \frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 4 = \frac{64}{3}\pi.$$

$$M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz$$

Uvažovaný kužel je rotační, osa z je jeho osou rotace. Meridiánem tohoto rotačního kužele je část přímky $x + z = 4 \longrightarrow z = 4 - x$. Potom rovnice kuželové plochy je $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

$$M_{xy} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left(\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\right)dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left(4 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy = \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r \le 4 \\ J = r & \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (4-r)^2 r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^4 (16r - 8r^2 + r^3)\,dr = \pi\left[8r^2 - \frac{8}{3}r^3 + \frac{r^4}{4}\right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi,$$

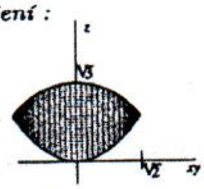
$$T = [0, 0, 1]. \qquad \blacksquare$$

14

Příklad 344. Určete moment setrvačnosti vzhledem k bodu $[0, 0, 0]$ tělesa W

$$W = \left\{[x, y, z] \in E_3;\ \ \frac{x^2 + y^2}{2} \le z \le \sqrt{3 - x^2 - y^2}\right\}, \quad \varrho = 1.$$

Řešení :



$$I_{[0,0,0]} = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \frac{r^2}{2} \le h \le \sqrt{3 - r^2} \longrightarrow \ \frac{r^2}{2} \le \sqrt{3-r^2} \longrightarrow r^4 \le 4(3 - r^2) \longrightarrow \\ y = r\sin\varphi & r^4 + 4r^2 - 12 \le 0 \longrightarrow (r^2 - 2)(r^2 + 6) \le 0 \longrightarrow \ r^2 \le 2 \longrightarrow \\ z = h & 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array}\right] =$$

14

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2}}\Big(\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} (r^2+h^2)r\,dh\Big)\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\Big[r^3h + r\frac{h^3}{3}\Big]_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\Big(r^3\sqrt{3-r^2} + \frac{r}{3}(3-r^2)\sqrt{3-r^2} - \frac{r^5}{2} - \frac{r^7}{24}\Big)\,dr = 2\pi\Big[-\frac{r^6}{12} - \frac{r^8}{24\cdot 8}\Big]_0^{\sqrt{2}} +$$

$$+ 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\Big(r\sqrt{3-r^2} + \frac{2}{3}r^3\sqrt{3-r^2}\Big)\,dr = 2\pi\Big(-\frac{8}{12} - \frac{16}{24\cdot 8}\Big) -$$

$$-\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{3-r^2}\Big(1+\frac{2}{3}r^2\Big)(-2r)\,dr = \begin{bmatrix} 3-r^2 = t & \mid\ r_1 = 0 \to t_1 = 3 \\ -2r\,dr = dt & r_2 = \sqrt{2} \to t_2 = 1 \end{bmatrix} =$$

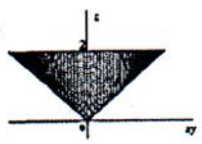
$$= -\frac{3}{2}\pi - \pi\int_3^1 \sqrt{t}\Big(1+\frac{2}{3}(3-t)\Big)\,dt = -\frac{3}{2}\pi + \pi\int_1^3\Big(3\sqrt{t} - \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big)\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\pi + \pi\Big[\frac{2\cdot 3t^{3/2}}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2t^{5/2}}{5}\Big]_1^3 = -\frac{3}{2}\pi + \pi\Big(2\cdot 3\sqrt{3} - \frac{4}{15}\cdot 9\sqrt{3} - 2 + \frac{4}{15}\Big) =$$

$$= \pi\Big(\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{97}{30}\Big) \doteq 3{,}002\,\pi. \qquad \blacksquare$$

Příklad 345. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa W,
$W = \{[x,y,z] \in E_3;\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\},\ \varrho = 1.$

Řešení :



$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

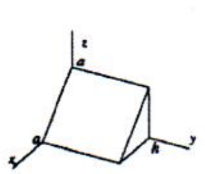
$$= \iint_{x^2+y^2\le 4}\Big((x^2+y^2)\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\Big(2-\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi & \mid\ 0\le r\le 2 \\ y = r\sin\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \\ J = r & \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(2-r)r\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\Big[2\cdot\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\Big]_0^2 = 2\pi\Big(8-\frac{32}{5}\Big) = \frac{16\pi}{5}. \qquad \blacksquare$$

Příklad 346. Určete statický moment M_{yz} (vzhledem k rovině (yz)) tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=a,\ y=h,\ (a>0, h>0)$, je-li hustota ϱ konstantní.

Řešení :



$$M_{yz} = \varrho\cdot\iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \begin{bmatrix} W: & 0\le z\le a-x \\ & 0\le x\le a \\ & 0\le y\le h \end{bmatrix} =$$

$$= \varrho\int_0^a\Big(\int_0^h\Big(\int_0^{a-x} x\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \varrho\int_0^a\Big(\int_0^h x(a-x)\,dy\Big)\,dx = \varrho\cdot h\Big[a\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^a =$$

$$= \frac{\varrho h a^3}{6}. \qquad \blacksquare$$

Příklad 347. Určete moment setrvačnosti I_{xy} (vzhledem k rovině (xy)) tělesa W,
$W = \{[x,y,z] \in E_3; x^2-2x+y^2 \le 0,\ -1\le z\le 1\},\ \varrho = 1.$

$x^2+y^2 \le 2-z$

paraboloid

$x^2+y^2+z^2 \le 2z$

$\downarrow$

$x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$

koule, $S=[0,0,1]$ $r=1$

válcové

$x = r\cos\alpha$

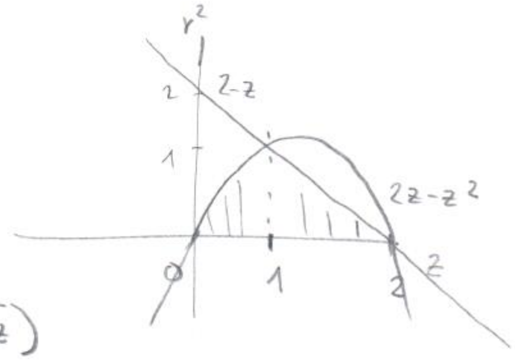
$y = r\sin\alpha$

$z = z$

$0< r^2 \le 2-z$ $\quad$ $0< r^2+z^2 \le 2z$ $\quad$ $r^2 \le 2z-z^2 = z(2-z)$

$\alpha \in (0, 2\pi)$

$z \in (0,2)$



$z \in (0,1)$ $\quad$ $z\in(1,2)$

$r \in (0, \sqrt{2z-z^2})$ $\quad$ $r \in (0,\sqrt{2-z})$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{2z-z^2}} r \; dr\, dz\, d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{1}{2}(2z-z^2)\, dz\, d\alpha = \pi\left[z^2-\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_0^{\sqrt{2-z}} r\, dr\, dz\, d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_1^{2}\frac{1}{2}(2-z)\, dz\, d\alpha = \pi\left[2z-\frac{z^2}{2}\right]_1^2 = \pi\left(4-2-2+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

celkem $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi = \pi\frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}\pi$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2)^2 \le z^3\}$.

Výsledek: $\pi/28$

Příklad 1.114. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2)^2 \le xy \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0\}$.

Výsledek: $\pi/120$

Příklad 1.115. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \ge 1 \wedge x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$.

Výsledek: $13\pi/10$

Příklad 1.116. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2 \wedge x^2+y^2 \le 1-z \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0\}$.

Výsledek: $\pi/16$

Příklad 1.117. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W z\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4 \wedge z \ge 1\}$.

Výsledek: $9\pi/4$

Příklad 1.118. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W y\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \ge 1 \wedge z \le 1 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \le z \wedge y \ge 0\right\}$.

Výsledek: $7/24 - \pi/16$

Příklad 1.119. *Vypočítejte trojný integrál*

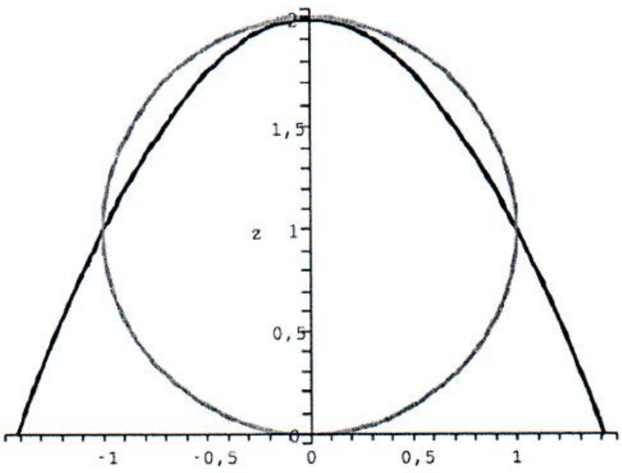
$$\int_W y\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \ge x \wedge 0 \le z \le 2x-x^2-y^2 \wedge y \ge 0\}$.

Výsledek: $13/60$

15 **Příklad 1.120.** *Vypočítejme objem tělesa určeného nerovnicemi* $x^2+y^2 \le 2-z$ *a* $x^2+y^2+z^2 \le 2z$.

15



Obr. 22

Řešení: Těleso můžeme popsat jako množinu

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \wedge x^2 + y^2 \leq 2 - z\right\}.$$

Objem množiny (míru množiny) W pak vypočítáme jako

$$\mu(W) = \int_W \mathrm{d}V.$$

Těleso, jehož objem počítáme, je průnik koule a rotačního paraboloidu. Řez tělesa rovinou $y = 0$ je na Obr. 22.

Z geometrie víme, že obě plochy jsou rotační a mají společnou osu. Proto jejich průnikem je kružnice. Řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 2z, \\ x^2 + y^2 & = & 2 - z, \end{array}$$

zjistíme, že kružnice průniku leží v rovinách o rovnicích $z = 2$ a $z = 1$ s tím, že kružnice v rovině $z = 2$ se redukuje na bod o souřadnicích $(0, 0, 2)$ a v rovině $z = 1$ je průnikem kružnice, jejíž kolmý průmět do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$. Celé těleso se tedy promítne do roviny xy jako kruh M: $x^2 + y^2 \leq 1$. Pro libovolné $(x, y, z) \in W$ je tedy

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$$

15

Užitím Fubiniovy věty pro trojný integrál pak dostaneme

$$\Omega = \int\limits_W \mathrm{d}V = \int\limits_M \left(\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A =$$

$$= \int\limits_M \left((1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}) - (2 - x^2 - y^2) \right) \mathrm{d}A =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \left(r - r^3 + r\sqrt{1 - r^2} \right) \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = \frac{7}{6}\pi.$$

Pro výpočet dvojného integrálu jsme použili substituci do polárních souřadnic (4).

V příkladech 1.121 – 1.125 vypočítejte objemy daných těles.

Příklad 1.121. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$. ***Výsledek:*** $8/3$

Příklad 1.122. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$. ***Výsledek:*** $7/12$

Příklad 1.123. *Těleso je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, *přičemž* $z \geq 0$ *a* $0 < a < b$.
Výsledek: $(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)\pi/3$

Příklad 1.124. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Výsledek: $32\pi/3$

Příklad 1.125. *Těleso je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$.
Výsledek: $80\pi/3$

Fyzikální aplikace trojného integrálu

Nechť W je trojrozměrné těleso, jehož hustota v každém bodě (x, y, z) je $h(x, y, z)$.

(I) Hmotnost tohoto tělesa je

$$m = \int\limits_W h(x, y, z) \, \mathrm{d}V \,. \tag{17}$$

(II) Statický moment tohoto tělesa vzhledem k rovině xy, resp. vzhledem k rovině xz, resp. vzhledem k rovině yz

$$S_{xy} = \int\limits_W zh(x, y, z) \, \mathrm{d}V, \; S_{xz} = \int\limits_W yh(x, y, z) \, \mathrm{d}V, \; S_{yz} = \int\limits_W xh(x, y, z) \, \mathrm{d}V. \tag{18}$$

16. k: $8x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 - 8x^2 - 2y^2$

zob. Válcové souradnice:

$$x = \frac{1}{\sqrt{8}} r \cos\alpha$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\alpha$$

$$z = z$$

pak k $\quad r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha \leq z \leq 4 - r^2\cos^2\alpha - r^2\sin^2\alpha$

$$r^2 \leq z \leq 4 - r^2$$

$r \in (0, \sqrt{2})$

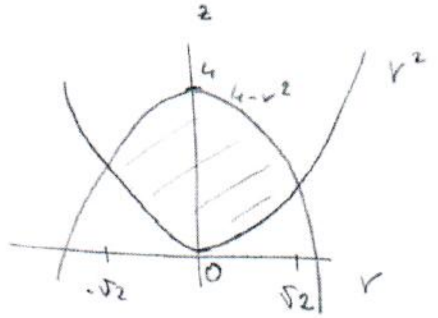
$\alpha \in (0, 2\pi)$

$z \in (r^2, 4 - r^2)$

$2r^2 = 4$

$r^2 = 2$

$r = \sqrt{2}$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{4-r^2} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} \cdot r \, dz\, dr\, d\alpha = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\,(4 - r^2 - r^2)\, dr\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\alpha = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\,(4-2) = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2}\, dx \qquad (1b.)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2} \right]_b^a dx = \int_0^{\infty}\int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2} \cdot 2y \; dy\, dx$$

$$= \int_b^a \int_0^{\infty} \frac{2y}{1+y^2x^2}\, dx\, dy = \int_b^a \left[2 \cdot \frac{\operatorname{arctg} yx}{\cancel{y}} \right]_0^{\infty} dy$$

$$= \int_b^a \pi \cdot 1\, dy = \pi \left[y \right]_b^a = \underline{\underline{\pi(a-b)}}$$

$(0,\infty) \times (b, a)$ měřitelná

Nedif (třeba) $b < a$

$$\left| \frac{2y}{1+y^2x^2} \right| \leq \left| \frac{2a}{1+b^2x^2} \right| \Rightarrow \text{majoranta}$$

$I(a,b)$ je spojitý v a i v b

(1c) [Majoranta $e^{-(p+1)x^2}$, $p \in (-1, \infty)$,

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1, +\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1, +\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a+1}}\;, \quad \text{tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro } a \in (-1, +\infty)\,.$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?),
k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0, +\infty)$, $A = \langle -1, 0 \rangle$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \leq \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$]

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$!

[a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a, b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \geq 0$, $b \geq 0$.

c/ Buď tedy $b \geq 0$ pevné, $a \in (0, +\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\, dx$

(majoranta – pro $a \in \langle p, q \rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ – určíme podle následujícího odhadu – proveďte !

$$\left| -\frac{2a}{x^2}\, e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \leq \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál – př. 5,84 – dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi}\;,$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a) \quad \text{pro } b \geq 0\,,\ a > 0\,.$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b-a)$ pro všechna $a, b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e.]

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+e^x}\,dx$$

(1) $$\frac{\sin x}{1+e^x} = \frac{\sin x}{e^x}\cdot\frac{1}{e^{-x}+1} = e^{-x}\sin x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-e^{-x}\right)^n = e^{-x}\sin x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(e^{-x}\right)^n$$

(2) napr. (c)

$$\int\sum\left|e^{-x}\sin x\,(-1)^n(e^{-x})^n\right| = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{e^x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{e^x-1}\,dx$$

u ∞: $\leq \dfrac{1}{e^x-1}$ což konverguje, neb se chová jako $\dfrac{1}{e^x}$

u 0: LSK s 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{e^{x-1}}\cdot\dfrac{x}{x} = \underline{\underline{1}}$

tedy $\int\sum|g_n| < \infty$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^\infty \sin x\cdot e^{-x(n+1)}\,dx =$$

u' $\quad v$

$u=-\cos x \quad v' = -(n+1)e^{-x(n+1)}$ $\rightarrow \left[-\cos x\, e^{-x(n+1)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \cos x (n+1) e^{-x(n+1)}$

tedy $\left(1+(n+1)^2\right)\int_0^\infty \sin x\, e^{-x(n+1)}\,dx = \left[e^{-x(n+1)}\left(-\cos x - (n+1)\sin x\right)\right]_0^\infty$ $\quad \underbrace{u' \quad v \quad u=\sin x \quad v' = -(n+1)^2 e^{-x(n+1)}}$

$= \left[\sin x\,(n+1)e^{-(n+1)x}\right]_0^\infty - \left(+\int_0^\infty \sin x\,(n+1)^2 e^{-x(n+1)}\right)$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+(n+1)^2}}$$

4,3. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ukažte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu $0 \leq \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^{1/n} \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} + \int_{1/n}^1 \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} \leq$

$$\leq \int_0^{1/n} nx\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{nx}\,dx = \frac{1}{2n} + \frac{\log n}{n} .$$

3/ Zkoumejte, zda $\frac{nx}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0 \quad v\ (0,1)$

(nekonvergují stejnoměrně, neboť

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ 0 ;\ \frac{n}{1+n^2} ;\ \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2})$$

4/ Použijte Lebesgueovu větu.

Z předchozího odstavce vyplývá, že

$$x \in (0,1)\ ,\ n \in N \Rightarrow 0 \leq \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2}$$

stačí tedy položit $g = \frac{1}{2}$ na intervalu $(0,1)$ a ověřit podrobně předpoklady Lebesgueovy věty,

dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0 .$$

Jako cvičení se pokusme nalézt "lepší" odhad, položme

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{pro každé } x \in (0,1).$$

Zvolme tedy pevně $x \in (0,1)$, místo abychom počítali

$\sup\limits_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2}$, položme pro každé $n \in \langle 1,+\infty)$ (a každé $x \in (0,1)$

$$H_x(n) = \frac{nx}{1+n^2x^2} .$$

Zde tedy považujeme n za "spojitě" proměnnou a hledejme

$$G(x) = \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Odůvodněte, proč $g(x) \leq G(x)$ pro každé $x \in (0,1)$!

Opět zjistěte, že

$$\sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ \frac{x}{1+x^2} ;\ 0 ;\ \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} .$$

Žádný "lepší" odhad jsme tedy neobdrželi. Uvědomte si, že funkce G není "nejlepším" odhadem, je to způsobeno tím, že místo abychom vyfix $x \in (0,1)$

$$g_x(n) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad n \in [1, \infty)$$

max / sup $\quad g_x(n) = ?$

$$g_x'(n) = \frac{x(1+n^2x^2) - nx(2nx^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$x + n^2x^3 - 2n^2x^3 = 0$$

$$n^2(x^2 - 2x^2) = -1$$

$$n_0^2 = \frac{1}{x^2} \qquad n_0 = \frac{1}{x} \qquad (\text{tj. lokální})$$

pak $\quad g(n_0) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x}{1 + \frac{1}{x^2} \cdot x^2} = \dfrac{1}{2}$

kde mohou být maxima ?

$$\frac{x}{1+x^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2} \qquad 2x \leq 1+x^2$$
$$0 \leq (1-x)^2 \ \checkmark$$

$n = 1$: $\quad \dfrac{x}{1+x^2}$

n_0 : $\quad \dfrac{1}{2}$

lim $n \to \infty$: $\quad 0$

$\Big\} \quad \sup g_x(n) = \dfrac{1}{2}$

Lebesgue s majorantou $\quad g(x) = \dfrac{1}{2}$

a/ $g_1(x) = \frac{|\cos x|}{x^q} + \frac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\frac{1}{x^p}, \frac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^q}$.

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\,dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0, +\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1), \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1, +\infty), \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ pro $s \in \langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}(x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1, +\infty) . \end{cases}$

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

. Sp-1 a Sp-2 promyslet