$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\,dx \qquad \text{je spoj pro } \alpha \in (2,\infty)$$

→ je třeba ukázat, že $F(\alpha)$ je spoj v $\forall \alpha \in (2,\infty)$.

(A) Zvolme pevné $\alpha = a = \overset{\text{(třeba)}}{20}$.

Zvolme okolí bodu $a = 20$, (třeba) $\mathcal{U} = [10, \infty)$.

Zjevně $a \in \mathcal{U}$.

Označme $D = (0,\infty)$ (z mezí $\int_0^\infty$).

Nyní pracujeme s funkcí $f: \mathcal{U} \times D \to \mathbb{R}$

$f: [10,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(\alpha, x) = \frac{x}{2+x^\alpha}.$$

Ověřme podmínky:

(Sp-1) pro s. v. $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ spoj v $a = 20$.

tedy pro pevné $x \in (0,\infty)$ je $\frac{x}{2+x^\alpha}$ spojitá v $a = 20$ (jako funkce α).

(Sp-2) pro $\forall \alpha \in \mathcal{U} = [10,\infty)$ je $f(\alpha, \cdot)$ měřitelné

pro pevné $\alpha \in \mathcal{U}$ je $\frac{x}{2+x\alpha}$ spojitá (jako funkce x)

→ tedy měřitelná

(Sp-3) $\exists g$ na $(0,\infty)$: $\forall \alpha \in \mathcal{U}$, $\forall x \in D$ je

$$|f(\alpha, x)| \le g(x)$$

zvolme
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \frac{x}{2+x^{10}} & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

pak $\frac{x}{2+x^\alpha} \le g(x)$ $\quad \forall x \in (0,1)$

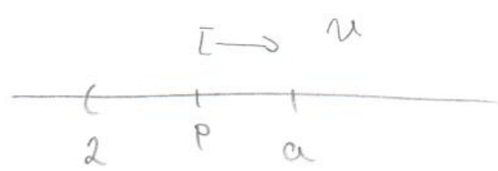
pro $\quad \forall \alpha \in [10,\infty)$.

Tedy jsou splněny podm., $\forall \alpha \in [10,\infty)$ je $f(\alpha,\cdot)$ integrovatelná a $F(\alpha)$ je spoj v $a = 10$.

(B) V obecnosti, zvolme <u>pevné</u> $\underline{a} \in (2,\infty)$.

zvolme okolí $U = [p,\infty)$ takové, že $a \in U$ a $U \subseteq (2,\infty)$,

tedy $2 < p < a$



Označme $D = (0,\infty)$.

Pracujeme s funkcí $f: U \times D \to \mathbb{R}$, $\quad f: \underset{\alpha}{[p,\infty)} \times \underset{x}{(0,\infty)} \to \mathbb{R}$

$f(\alpha,x) = \frac{x}{2+x^\alpha}$.

Pak

(Sp-1) pro s.v. $x \in (0,\infty)$ je $f(\cdot,x)$ spoj v a (jako fce α). Ano.

(Sp-2) pro $\forall \alpha \in [p,\infty)$ je $\frac{x}{2+x^\alpha}$ spoj. (jako fce x) ⇒ měřitelná

(Sp-3) Najdeme $g = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0,1) \\ \frac{x}{2+x^p} & x \in [1,\infty) \end{cases}$

Pak $\frac{x}{2+x^\alpha} \le g(x)$ $\quad \forall \alpha \in [p,\infty)$, $\forall x \in (0,\infty)$.

Tedy $F(\alpha)$ je spoj v $a \in [p,\infty)$. Totéž lze udělat pro $\forall \alpha \in [p,\infty)$ ⇒ $F(\alpha)$ je spoj na $[p,\infty)$.

Což lze udělat pro $\forall$ intervaly typu $[p,\infty)$, $p > 2$.

⇒ $F(\alpha)$ je spoj na $(2,\infty)$.

(c) Co nevyjde:

Zvolme U co největší, tedy $U = (2, \infty)$, a pevné $a \in (2, \infty)$.

Pak vyšetřujeme $f(\alpha, x)$ na $(2, \infty) \times (0, \infty)$.

$$\frac{x^4}{2 + x^\alpha}$$

Zkusme (Sp-3): hledáme majorantu pro $\alpha \in (2, \infty)$.

Jediný kandidát pro $x \geq 1$ je $\frac{x}{2+x^2} \geq \frac{x}{2+x^\alpha}$

pro $x < 1$ třeba $\frac{x}{2} \geq \frac{x}{2+x^\alpha}$

Ale $\frac{x}{2+x^2}$ není konvergentní; $\int_1^\infty \frac{x}{2+x^2} = \infty$.

Tedy moc široké okolí U.