

5. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Heineova). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a necht' funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a . Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Hinty

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 + 1/n)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^2 + 1}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + 2n}{n^2 + 2n^3}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n}}$

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln n}$

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{(n^2+1)^{-1}} - 1\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \cos \frac{1}{n}$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2n}{1+n^2},$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2nx}{x^2+n^2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+1}$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1), a \in \mathbb{R}$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}$$

$$(n) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$$

Bonus

Dokažte, nebo najděte protipříklad.

- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$.
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
- Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.
- Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.



Figure 1: <https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load>

