

10. cvičení - substituce

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci). Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) . Necht' φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b) , která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. $f(x) = \frac{x}{3 - 2x^2}$

2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

3. $f(x) = xe^{-x^2}$

4. $f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^2}$

5. $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$

6. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

7. $f(x) = \sin^5 x \cos x$.

8. $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$

9. $f(x) = \frac{\arctan x}{1 + x^2}$

10. $f(x) = \operatorname{tg} x$

11. $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

12. $f(x) = \frac{x}{4 + x^4}$

13. $f(x) = \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$

14. $f(x) = \cos^3 x$

15. $f(x) = \frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}}$

16. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$

17. $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

18. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$

19. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

20. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

21. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}}$

22. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}$

23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$

24. $f(x) = \operatorname{cotg} x$

25. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$