

11. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Řešení: Zvolme substituci $x = 2 \cos t$. Pak $dx = -2 \sin t dt$ a $4 - x^2 = 4(1 - \cos^2 t) = 4 \sin^2 t$. Intervaly budou: $t \in (0, \pi)$, pak $x \in (-2, 2)$. Navíc $-2 \sin t \neq 0$ na $(0, \pi)$ a funkce $2 \cos t$, $t \in (0, \pi)$ je na (surjekce). Dostáváme

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \int \sqrt{4 \sin^2 t} (-2 \sin t) dt = \int -4 |\sin t| \sin t dt$$

Protože jsme na intervalu $(0, \pi)$, tak $|\sin t| = \sin t$ a

$$\int -4 |\sin t| \sin t dt = -4 \int \sin^2 t dt.$$

Poslední integrál lze vyřešit dvěma per partes nebo přepisem $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$. Pak

$$-4 \int \sin^2 t dt = -4 \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -4 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) + c$$

Celkem tedy pro $x \in (-2, 2)$ máme

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = -4 \left(\frac{\arccos(x/2)}{2} - \frac{\sin(2 \arccos(x/2))}{4} \right) + c$$

(b) $f(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

Řešení: Definiční obor funkce f je interval $(-1, 1)$, stačí tedy určit primitivní funkci na tomto intervalu. Provedeme substituci $x = \sin t$. Protože $x \in (-1, 1)$, je $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t \implies dx = \cos t dt,$$

a protože $\cos t > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podle druhé věty o substituci máme

$$\int \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{(1 - \sin^2 t)^{3/2}} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^3 t} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \frac{C}{C} \tan t$$

a s přihlédnutím k tomu, že pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$, dostaneme

$$= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

Řešení: Je vidět, že $x \in (-a, a)$. Použijeme substituci $x = a \sin t$. Potom

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int a \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cos t dt = \int a \sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \\ &= \int a(1+\sin t) dt \stackrel{C}{=} at - a \cos t = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$

Řešení: Lze použít substituci $a \sinh t$, ale ukážeme si jiný postup, použijeme substituci $x = a \operatorname{tg} t$. Potom $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ a s přihlédnutím ke vztahu $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{1}{a^3 \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{a^2} \cos t dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{a^2} \sin t = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \end{aligned}$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} \implies \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \implies \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

2. Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Potom $dx = a \cosh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \int a^2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (t + \cosh t \sinh t) = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

Řešení:

Použijeme substituci $x = a \cosh t$. Potom $dx = a \sinh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \int a^2 \sinh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (\cosh t \sinh t - t) = \\ &= -\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg} \cosh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}.$$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

Řešení: Provedeme substituci $x = \sqrt{2} \cosh t$. Potom $dx = \sqrt{2} \sinh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx &= \int \frac{2 \cosh^2 t}{\sqrt{2} \sinh t} \sqrt{2} \sinh t dt = \int 2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} (t + \sinh t \cosh t) = \\ &= \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \stackrel{C}{=} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Potom $dx = a \cosh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx &= \int \frac{a^2 \sinh^2 t}{a \cosh t} a \cosh t dt = a^2 \int \sinh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} [t - \sinh t \cosh t] = \\ &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

3. Směs

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1 + e^x}$. Pak $e^x = y^2 - 1$, tedy $x = \ln(y^2 - 1)$. Dopočteme $dx = \frac{2y}{y^2 - 1} dy$. Odtud máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} dx = \int \frac{1}{y} \frac{2y}{y^2 - 1} dy = 2 \int \frac{1}{y^2 - 1} dy \stackrel{C}{=} 2 \ln \left| \frac{1 - y}{1 + y} \right| = 2 \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 + e^x}}{1 + \sqrt{1 + e^x}} \right|$$

(b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x - 7} + 3}$

Řešení: Substituce $y = \sqrt{4x - 7}$. Pak $(y^2 + 7)/4 = x$ a $y/2 dy = dx$. Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\sqrt{4x - 7} + 3} dx &= \int \frac{5}{y + 3} \frac{y}{2} dy = \frac{5}{2} \int \frac{y}{y + 3} dy = \frac{5}{2} \int \left(1 - \frac{3}{y + 3} \right) dy = \\ &= \frac{5}{2} (y - 3 \ln |y + 3|) + c = \frac{5}{2} (\sqrt{4x - 7} - 3 \ln |\sqrt{4x - 7} + 3|) + c \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \sin \sqrt{x}$

Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt{x}$. Pak $y^2 = x$ a $2y dy = dx$. Potom

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \int 2y \sin y dy$$

Tento integrál vyřešíme pomocí per partes, zvolíme $v = 2y$, $u' = \sin y$. Pak $v' = 2$, $u = -\cos y$. Máme

$$\int 2y \sin y dy = -2y \cos y + 2 \int \cos y dy = -2y \cos y + 2 \sin y + c$$

Zpětně zasubstituujeeme a dostaneme

$$\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c.$$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt[3]{x}$. Pak $y^6 = x$ a $6y^5 dy = dx$. Máme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{y^3}{1 + y^2} 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^8}{1 + y^2} dy =$$

Provedeme dělení mnohočlenů a získáme

$$6 \int \frac{y^8}{1 + y^2} dy = 6 \int y^6 - y^4 + y^2 - 1 + \frac{1}{1 + y^2} dy = 6 \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} - y + \arctan y \right) + c$$

Vrátíme substituci:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = 6 \left(\frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{1/2}}{3} - x^{1/6} + \arctan x^{1/6} \right) + c$$