(1) $$\int_1^\infty \frac{x^5+32}{(x^6-1)\sqrt[3]{x}}\,dx$$

u 1: $g(x) = 1/x-1$ $\qquad \int_1^{42} \frac{1}{x-1}\,dx = \infty$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x^5+32)}{(x^6-1)\sqrt[3]{x}} = \frac{33}{6}$$

$(x^5+32) \to 33$, $\sqrt[3]{x} \to 1$

zLH $\lim_{x\to 1+} \frac{1}{6x^5} = \frac{1}{6}$

$\int_1^{42} f$ div zLS2

u ∞: $g(x) = \frac{x^5}{x^6\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ $\qquad \int_2^\infty x^{-4/3} < \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+32}{x^5}\cdot\frac{x^6}{x^6-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 1$$

zLS2 $\int_2^\infty f$ <u>k</u>

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x+4}{\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)\sqrt{x\sin x}}\,dx$

u 0: $\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \overset{\text{na } (0,\pi)}{=} \frac{1}{x} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} = \infty$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(x+4)\,\sqrt{x^2}}{\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)\sqrt{x\sin x}} = -\frac{8}{5\pi} \qquad \int_0^{\pi/2} f \ \text{div} \qquad \text{z LSK}$$

u π: $\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x+\pi}} \qquad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi-x}} < \infty$

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\sqrt{-x+\pi}}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{1}$$

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\pi-x}{\sin x} \overset{\text{L'H}}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\pi-} \frac{-1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{f}{g} = \frac{\pi+4}{\pi-\frac{5\pi}{2}} \quad \text{vlastní limita}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f < \infty \qquad \text{z LSK}$$

(3)

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x+2}{(x+1)\ln(1-\sqrt[3]{x})}\,dx$

u $-\infty$: $\quad g(x) = 1/\ln -x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+2)\ln -x}{(x+1)\ln(1-\sqrt[3]{x})} = \lim \underbrace{\frac{x+2}{x+1}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln -x}{\ln(1-\sqrt[3]{x})}}_{\downarrow\, \text{L'H}} = 3$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x^{2/3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3\,x^{2/3}(1-\sqrt[3]{x})}{x} = 3$$

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\ln(-x)}\,dx = \int_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln y}\,dy = \infty \quad \text{(z tabulky)}$$

$y = -x \qquad dy = -dx$

tedy z LSZ $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} f = \infty$

u -1: $\quad g(x) = \frac{1}{x+1} \qquad \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+1} = \infty$

$$\lim_{x\to-1-} \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)\ln(1-\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{\ln 2} \qquad \text{z LSZ} \quad \int_{-2}^{-1} f = \infty$$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f$

u -1 div z (a)

u 0: $\quad g(x) = \frac{1}{-\sqrt[3]{x}} \qquad \displaystyle\int_{-1/2}^{0} -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx < \infty$

$$\lim_{x\to0-} \frac{(x+2)(-\sqrt[3]{x})}{(x+1)\ln(1-\sqrt[3]{x})} = 2 \qquad \text{z LSZ} \quad \int_{-1/2}^{0} f \quad \underline{\text{konv}}$$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x \ln|x|}{x(x-1)}\,dx$

u $-\infty$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{e^x \ln|x|}{x(x-1)}\,dx = \int_{2}^{\infty} \frac{e^{-y} \ln y}{-y(-y-1)}\,dy$

$y = -x \qquad dy = -dx$

$$\frac{e^{-y}|\ln y|}{y(y+1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SK}}}{\le} \frac{e^{-y}}{y} \qquad \int_2^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy \ \ \underline{\text{konv.}}$$

ze SK $\displaystyle\int_2^\infty \frac{e^{-y}|\ln y|}{y(y+1)} \underline{< \infty}$

u 0: $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{e^x \ln|x|}{x(x-1)}\,dx = \int_0^2 \frac{e^{-y}\ln y}{+y(y+1)}\,dy$

$y = -x \quad dy = -dx$

$$g(y) = \frac{\ln y}{y} = \ln y \cdot y^{-1} \qquad \int_0^2 |\ln y|\,\frac{1}{y}\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tabulka}}}{=} \infty$$

$$\lim_{y\to 0+} \frac{e^{-y}\cancel{\ln y}\cdot\cancel{y}}{\cancel{y}(y+1)\cdot\cancel{\ln y}} = 1 \qquad \text{z LSK} \quad \int_{-2}^{0} f\,dx \underline{= \infty}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x \ln|x|}{x(x-1)}\,dx$

u 0 jako v (a)

u 1 lze spoj. dodef $\to$ $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f$ $\underline{\text{konv.}}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\arcsin(\sin \pi x)\cdot\sqrt{|\ln(\frac{1}{2}+|x|)|}}\,dx$

v 0: $\quad g(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x} = \infty$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\arcsin(\sin \pi x)\sqrt{|\ln(\frac{1}{2}+|x|)|}} = \frac{1}{\pi\sqrt{|\ln 2|}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin \pi x}{\arcsin \pi x}\cdot\frac{\pi x}{\sin \pi x}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

z LSK $\displaystyle\int_0^{1/2} f = \infty$

v 1: $\quad \sin \pi x \approx \pi - \pi x = \pi(1-x) \qquad \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{\pi(1-x)}\,dx = \infty$

$g(x) = 1/\pi(1-x)$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\pi(1-x)}{\arcsin(\sin \pi x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{-\pi}{\sqrt{1-(\sin \pi x)^2}}\cdot\frac{1}{\cos \pi x\cdot\pi}$$

$$= \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f}{g} = \frac{1}{\sqrt{\ln 3/2}}$$

z LSK $\displaystyle\int_{1/2}^1 f$ $\underline{\underline{\text{div}}}$

(6)

(a) $$\int_{-\infty}^{-1} \underbrace{\frac{\arctan(x+1)}{\sqrt[3]{\arctan x}\,(1-\arctan x)}}_{f(x)}\,dx$$

$\underline{-\infty}$: $\arctan x$, $\arctan(x+1)$ $\approx -\frac{\pi}{2}$

tedy fce se chová jako konstanta $g(x) = \frac{-\pi/2}{-\frac{\pi}{2}(1+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\arctan(x+1)}{\sqrt[3]{\arctan x}\,(1-\arctan x)}}{1+\pi/2} = 1 \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} = \infty$$

LSZ

$\to f(x)$ **div.**

$\underline{-1}$ fci lze spoj. dodefinovat $\to \int_{-2}^{-1} f(x)$ konv.
(a zpět.)

(b) $\int_{-1}^{0} f(x)$

u 0 $\arctan x \approx x$ $\to$ srovnáme s $g(x) = \frac{\pi/4}{\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{\arctan(x+1)}{\sqrt[3]{\arctan x}\,(1-\arctan x)}}{\frac{\pi/4}{\sqrt[3]{x}}} = 1 \qquad \int_{-1/2}^{0} \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt[3]{x}} < \infty$$

z LSZ $\int_{-1/2}^{0} f(x)$ **konv.** (u -1 lze spoj dodef) jako minule

(6)

(e) $\int_0^{\tan 1} f(x)$

u 0 jako výše

u tg 1: $1-\arctan x \approx$?

zkusíme $(x-\mathrm{tg}\,1)^{\alpha}$ $\qquad \lim_{x\to \tan 1-} \frac{1-\arctan}{(x-\tan 1)^{\alpha}} \overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to \frac{\pi}{4}-} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\alpha(x-\mathrm{tg}\,1)^{\alpha-1}}$

pro $\alpha=1$ dostaneme $\lim_{x\to \mathrm{tg}\,1} \frac{-1}{1+x^2} = \frac{-1}{1+\mathrm{tg}^2 1}$

$g(x) = \frac{\arctan(\mathrm{tg}\,1+1)}{(x-\mathrm{tg}\,1)}$ (musí být > 0)

! $\lim_{x\to \mathrm{tg}\,1-} \frac{f(x)}{g(x)} = -1-\mathrm{tg}^2 1$ $\qquad \int_{0{,}01}^{\tan 1} \frac{\arctan(\mathrm{tg}\,1+1)}{(x-\mathrm{tg}\,1)}\,dx = \infty$

(subst. a stačila)

z LSE → $\int_0^{\mathrm{tg}\,1} f$ div

(d) $\int_{\mathrm{tg}\,1}^{\infty} \frac{\arctan(x+1)}{\sqrt[3]{\arctan x}\,(1-\arctan x)}\,dx$

u tg 1: jako výše → div

u ∞ : jako u −∞ → div

(7)

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\underbrace{(1+x)\sqrt[3]{x(x-1)^2}}_{f}}\,dx$

u $-\infty$: $\underset{\sim}{f} \quad x^2$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x(x-1)^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}} = 1$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$ z LSK $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} f(x) < \infty$

u -1 : $g(x) = \frac{-1}{1+x}$ $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1+x}\,dx = \infty$

(třeba z výpočtu)

$$\lim_{x\to-1-} \frac{x+1}{(1+x)\,3\sqrt{x(x-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{-1(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

z LSK $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)$ div.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\,dx$

u -1: div jako výše

u 0: $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx < \infty$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f}{g} = \frac{1}{(1+0)\sqrt[3]{1}} = 1$$ z LSK $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f < \infty$

(7)

(c) $\int_0^1 f$

u 0 jako výše

u 1: $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx < \infty$

$\lim_{x\to 1-} \frac{f}{g} = \frac{1}{2}$ z LSK $\int_{1/2}^{1} f$ konv.

(d) $\int_1^\infty f$

u 1: stejně

u ∞: $g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}$ k

$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = 1$ LSK $\to$ $\int_2^\infty f$ k

(8)

(a) $$\int_{-\infty}^{0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{e^{|x|}-1}\quad e^{x}(x-1)}}_{f} \, dx$$

u $-\infty$: $$f \approx \frac{1}{x\, e^{x} e^{\frac{|x|}{2}}} = e^{-x+\frac{|x|}{2}} \frac{1}{x}$$

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-x+\frac{|x|}{2}} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_{1}^{\infty} - e^{y+\frac{|y|}{2}} \frac{1}{y}\, dx = -\int_{1}^{\infty} e^{\frac{3y}{2}} \frac{1}{y} = -\infty$$

$y = -x$

$dy = -1\, dx$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{e^{x}}\; x \quad e^{|x|/2}}{\cancel{e^{x}}\underbrace{(x-1)}_{1} \sqrt{e^{|x|}-1}} = 1 \qquad \int_{-\infty}^{-1} f(x) \text{ div} \qquad \text{z LSK}$$

u 0: $\quad g = 1/\sqrt{|x|} \qquad \int_{-1}^{0} 1/\sqrt{|x|} < \infty$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{e^{|x|}-1}\quad e^{x}(x-1)} = -1 \qquad \text{LSK} \qquad \int_{-1}^{0} f < \infty$$

(b) $\int_{0}^{1} f(x)$

u 0 jako v (a)

u 1: $\quad g(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x-1} = \infty$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x-1}{\sqrt{e^{|x|}-1}\quad e^{x}(x-1)} = \frac{1}{e(\sqrt{e-1})} \qquad \text{z LSK} \qquad \int_{1/2}^{1} f = \infty$$

Příklad 4 : Určete, pro která $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, konverguje následující Newtonův integrál:
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x\,.$$
(15 bodů)

Řešení : Pišme
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x =: I_0 + I_\infty\,.$$

(1) Protože $f(x) := \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x) \in \mathcal{C}((0,1])$, závisí konvergence integrálu I_0 na chování funkce f „u nuly". Máme $f(x) > 0$ pro $x \in (0,1]$, a
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)}{\frac{1}{x^{a-3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2x \cdot \frac{x^{a-3}}{x^a} = 2$$
je vlastní a nenulová. Proto podle limitního srovnávacího kritéria pro Newtonův integrál konverguje integrál I_0 právě tehdy, když konverguje integrál
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{a-3}}\, \mathrm{d}x\,.$$
Tento integrál však konverguje právě tehdy, když $a - 3 < 1$ neboli $a < 4$, jak lze ověřit například jeho přímým výpočtem.

(2) Je $f \in \mathcal{C}([1,+\infty))$, ale f „střídá znaménko blízko nekonečna". Protože funkce $\sin 2x$ má na intervalu $(1,+\infty)$ omezenou primitivní funkci $(-\frac{1}{2}\cos 2x)$, a $\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \in \mathcal{C}([1,+\infty))$, bude podle Dirichletova kritéria pro konvergenci Newtonova integrálu stačit, když ukážeme (přesněji, když najdeme taková $a \in \mathbf{R}, a > 0$, pro která platí):

(i) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} = 0\,,$$

(ii) $\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}$ je monotónní na nějakém okolí bodu nekonečno.

Ad (i): pro všechna $x > 0$ platí
$$\left|\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}\right| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^a} \to 0 \qquad \text{když } x \to +\infty\,, \quad \text{pro všechna } a \in \mathbf{R},\ a > 0,$$
odkud plyne (i) pro všechna $a \in \mathbf{R}, a > 0$.

Ad (ii): derivace funkce $g(x) := \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}$ je
$$g'(x) = \frac{x^4}{(1+x^4)\, x^{a+1}} \left[\frac{2}{x^2} - a \cdot \operatorname{arctg} x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)\right]\,, \quad x > 0\,.$$
Výraz v hranaté závorce má pro $x \to +\infty$ limitu $-a\frac{\pi}{2}$, který je pro $a > 0$ záporný. Existuje tedy $x_0 \in \mathbf{R}$ takové, že $g'(x) < 0$ pro všechna $x \in (x_0, +\infty)$. Odtud plyne (ii).

Závěr: daný integrál konverguje pro $a \in (0,4)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- konvergence na okolí nuly .... 5 bodů
- ověření monotonie .... 5 bodů
- ověření omezenosti primitivní funkce .... 2 body
- aplikace kritéria a závěr .... 3 body

Poznámka: bylo možno také použít rovnou Dirichletovo kritérium:

Posloupnost $\{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty a derivace funkce $\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}{2x+\frac{100}{x}}$ je od jistého $x_0 \in \mathbf{R}$ záporná, tedy tato funkce klesá na okolí nekonečna, a snadno se také ukáže, že má v nekonečnu nulovou limitu. V tomto případě je ovšem výpočet derivace výše uvedené funkce a zjištění jejího chování v blízkosti nekonečna poněkud obtížnější, i když proveditelné.

Příklad 3 : Integrovaná funkce je definovaná na $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$, primitivní funkci tedy hledáme na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

Při použití substituce $t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ dostaneme postupně (všimněte si, že pro žádné $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ nemůže být t^2 být rovno 1):

$$x=\frac{t^2-2}{1-t^2}, \qquad \mathrm{d}x=-\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$(x+1)(4x+5)(2x+3)=-\frac{(t^2+3)(t^2+1)}{(1-t^2)^3}, \qquad (3x+4)=-\frac{t^2+2}{1-t^2},$$

a tedy

$$\int \frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky dá

$$-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t-\int\frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t\overset{c}{=}-\operatorname{arctg}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\,,\ \ t\in\mathbf{R}\,,$$

a tedy

$$\int \frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,\mathrm{d}x\overset{c}{=}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)$$

na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

Příklad 4 : Označíme

$$I:=\int_0^\infty(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$I_1:=\int_0^1(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$I_\infty:=\int_1^\infty(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Pro vyšetření chování integrálu I_0 použijeme

$$\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}}{x^{a+1}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^a\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2x+1}=1\,,$$

proto I_0 konverguje (podle limitního srovnávacího kritéria) právě když konverguje $\int_0^1 x^{a+1}\,\mathrm{d}x$, což je právě tehdy, když $a>-2$.

Pro vyšetření chování integrálu I_∞ použijeme následující úvahu: protože $(\operatorname{arctg} x)^a$ je na $(1,+\infty)$ monotónní a omezená funkce pro libovolné $a \in \mathbf{R}$ (ukažte to podrobně), bude podle Abelova kritéria stačit, když bude konvergovat integrál

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál však konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\sin x$ má na $(1,+\infty)$ omezenou primitivní funkci a $\frac{1}{2x+1}$ jde monotónně k nule pro $x \to +\infty$.

Závěr: I konverguje, právě když $a > -2$.

- Součet konvergentních řad (1) a (2) je konvergentní řada, tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{konverguje.} \tag{3}$$

- Protože posloupnost $\cos\frac{1}{n}$ je omezená a rostoucí (odůvodněte podrobně!), konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (3)) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} \cdot \cos \frac{1}{n}.$$

Závěr: řada konverguje.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Potom máme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Tato substituce převede uvažovaný integrál na

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\, dt.$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)} = \frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1}.$$

Standardní integrací racionálních zlomků pak dostaneme

$$\int \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(t^2+t+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t \qquad \text{na } \mathbf{R}.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\, dt &= \left[\frac{1}{2} \log\left(\frac{t^2+t+2}{t^2+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) + \operatorname{arctg} t \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{7}}\right). \end{aligned}$$

Poznámka: Pozor! Rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+1}{t^2+t+2}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-t}{t^2+1}\, dt$$

neplatí, neboť integrály na pravé straně neexistují.

Příklad 4 : Integrand $f(x) = \operatorname{tg}^{\alpha} x \sin^{\beta} x$ je spojitý a kladný na intervalu $(0, \pi/2)$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Integrál tedy $\int_0^{\pi/2} f$ tedy konverguje, právě když konvergují integrály $\int_0^{\pi/4} f$ a $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$.

- Integrál $\int_0^{\pi/4} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = x^{\alpha+\beta}$ definovanou na $(0, \pi/4]$. Platí $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^{\pi/4} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta}\, dx$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

• Integrál $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = (\pi/2 - x)^{-\alpha}$ definovanou na $[\pi/4, \pi/2)$. Platí $\lim_{x\to\pi/2-} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\frac{\pi}{2} - x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $-\alpha > -1$.

Závěr: Integrál $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x \sin^\beta x\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$ a $\alpha < 1$.

---

tedy i
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)n=0$$
podle Heineho věty.

- Označíme $f(x) := 1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, potom
$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}-(\log(x+1)-\log x)\,.$$
Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x\in(0,\infty)$ existuje $\xi_x\in(0,1)$ takové, že
$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+\xi_x}<0 \qquad \text{pro všechna } x>0.$$
Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0,\infty)$, a proto je i posloupnost $a_n=f(n)$ klesající.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka: Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí
$$f''(x)=\frac{1}{x(1+x)^2}, \qquad x\in(0,\infty).$$
Funkce f' je tedy rostoucí na $(0,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. Odtud plyne, že f' je záporná na $(0,\infty)$, a tedy f je na $(0,\infty)$ klesající.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\sqrt{2x+1}=t$, tj. $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$. Dostaneme
$$I:=\int_0^1\frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$
Rozkladem na parciální zlomky zjistíme
$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}=\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\,.$$
Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$. Celkově dostaneme
$$\int\left(\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\right)\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}, \quad t\in\mathbf{R}.$$
Tedy je
$$I=\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Příklad 4 : Označíme
$$f(x)=\frac{\log^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$
pro $x\in(0,\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0,\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x)=\frac{x^\alpha x^\beta}{x^2}=x^{\alpha+\beta-2}$. Funkce g je na intervalu $(0,1]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to0+}f(x)/g(x)=\pi^{-3}\in(0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > 1$.

Bod π. Položme $g(x) = (\pi - x)^{-3}(\pi - x)^{\beta} = (\pi - x)^{-3+\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1, \pi)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to\pi-} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_1^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\beta > 2$.

Závěr: $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(\alpha + \beta > 1 \ \&\ \beta > 2)$.

$a_n := f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, je tedy rostoucí a snadno se spočte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená (monotonii lze opět dostat například zderivováním příslušné funkce, omezenost plyne z toho, že posloupnost má vlastní limitu – jakou?). Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{2}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n\right| \le \frac{\pi}{2}\left|\log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{e^n + 1}{e^n - 1}\right) \tag{3}$$

a dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n-1}} \cdot \frac{\frac{2}{e^n-1}}{\frac{2}{e^n}} = 1 \tag{4}$$

(spočtěte pečlivě). Použijte dále skutečnost, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ konverguje (například podle podílového kritéria). Výsledek pak dá limitní srovnávací a srovnávací kritérium s použitím (3) a (4).

Příklad 3 : Použijeme substituci $e^x = y$, $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$. Dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2} = \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{4}{y+2} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{4}{y+1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{4}{y+2} + 4\log(y+2) - \frac{1}{y+1} - 4\log(y+1)\right]_0^{\infty} \\ &= \left[-\frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} + 4\log\left(\frac{y+2}{y+1}\right)\right]_0^{\infty} = 3 - 4\log 2. \end{aligned}$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha} \frac{\sin^{\beta}(\pi x)}{(1-x)^{\alpha}}$$

pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = x^{3\alpha}(\pi x)^{\beta}$. Funkce g je na intervalu $(0, 1/2]$ kladná, spojitá a nepříliš těžký výpočet (například s využitím Taylorova polynomu pro funkci arcsin z příkladu 1) ukazuje $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^{1/2} g(x)\,\mathrm{d}x$ přičemž tento integrál konverguje, právě když $3\alpha + \beta > -1$.

Bod 1. Položme $g(x) = (1 - x)^{-\alpha} \cdot (1 - x)^{\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1/2, 1)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 1-} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_{1/2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_{1/2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $-\alpha + \beta > -1$, tj. $\alpha - \beta < 1$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(3\alpha + \beta > -1 \ \&\ \alpha - \beta < 1)$.

Příklad 3 : Platí $5\cos^2 x + 4\sin x\cos x + \sin^2 x = (2\cos x + \sin x)^2 + \cos^2 x$, a protože funkce sin a cos nejsou v žádném reálném bodě současně rovny nule, je jmenovatel integrandu kladný pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Integrand je tedy spojitý na $\mathbf{R}$ a má (spojitou) primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$.

Použijeme substituci $\operatorname{tg} x = y,\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$, kde uvažujeme $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in \mathbf{R}$. Po substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+4y+5} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+2)^2+1} \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(2+y), \qquad y \in \mathbf{R}\,.$$

Funkce

$$F_0(x) := \operatorname{arctg}(2 + \operatorname{tg} x)$$

je tedy primitivní k funkci $f(x) := \frac{1}{5\cos^2 x + 4\sin x\cos x}$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Přímým výpočtem lze ověřit, že F_0 je primitivní k f i na všech intervalech tvaru $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Pro zkonstruování primitivní funkce k f na celém $\mathbf{R}$ použijeme techniku „lepení“. Spočteme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F_0(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} F_0(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

v každém z bodů $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ je tedy potřeba „odstranit skok“ velikosti π. Proto je funkce

$$F(x) := \begin{cases} F_0(x) + k\pi\,, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)\,,\ \ k \in \mathbf{Z}\,, \\ \\ \frac{\pi}{2} + k\pi\,, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

primitivní k funkci f na celém $\mathbf{R}$. Všechny funkce, primitivní k f na $\mathbf{R}$, mají pak tvar $F(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$.

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = \operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x}) \cdot \sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)$$

pro $x \in (0, 2\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0, 2\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0**.** Pišme

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x})}{x^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\beta} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^\beta. \tag{2}$$

Položíme-li tedy $g(x) = x^{\frac{\alpha}{2}+\beta}$, dostaneme z (2) standardním výpočtem, že $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Funkce g je na intervalu $(0, \pi]$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x$. Tento integrál však konverguje, právě když $\frac{\alpha}{2} + \beta > -1$.

Bod 2π**.** Pišme

$$f(x) = \operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - \frac{x}{2}}\right)^\beta \cdot \left(\pi - \frac{x}{2}\right)^\beta. \tag{3}$$

Položíme-li tedy $g(x) = \left(\pi - \frac{x}{2}\right)^\beta$, dostaneme z (3) standardním výpočtem, že $\lim\limits_{x\to 2\pi-} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Funkce g je na intervalu $[\pi, 2\pi)$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_\pi^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_\pi^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\beta > -1$.

Závěr: $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(\frac{\alpha}{2} + \beta > -1\ \&\ \beta > -1)$.

Příklad 4 :

Označíme
$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha} \sin^{\beta}(\pi x) \cos^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = x^{3\alpha}x^{\beta} = x^{3\alpha+\beta}$. Funkce g je na intervalu $(0,1/2]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = (\frac{1}{6})^{\alpha}\pi^{\beta} \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^{1/2} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $3\alpha + \beta > -1$.

Bod 1. Položme $g(x) = (1-x)^{\beta}(1-x)^{\alpha} = (1-x)^{\alpha+\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1/2,1)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 1-} f(x)/g(x) = (\pi/2-1)^{\alpha}\pi^{\beta}(\pi/2)^{\alpha} \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_{1/2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_{1/2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(3\alpha + \beta > -1 \ \&\ \alpha + \beta > -1)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- bod 0 .... 7 bodů
- bod 1 .... 7 bodů
- závěr .... 1 bod
