

## 1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/  
kytaristka@gmail.com

### Teorie

Podmínky	Dobře definováno	Nedefinováno
$\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$	$-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$	$\infty - \infty$
$\forall a \in \{\infty\} \cup \mathbb{R}$	$\infty + a = a + \infty = \infty$	$\frac{0}{0}$
	$-(\infty) = -\infty \quad -(-\infty) = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$	$0 \cdot \infty$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = -\infty$	$0^0$
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$	$1^\infty$
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$	$\infty^0$
	$1/\infty = 0, 1/(-\infty) = 0$	$\frac{1}{0}$

**Definice 1.** Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel a  $A \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $A$  je *vlastní limitou posloupnosti*  $\{a_n\}$ , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim a_n = A$  nebo  $a_n \rightarrow A$ .

Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu rovnou  $\infty$ , jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

**Věta 2** (Aritmetika limit). Necht'  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jsou dvě posloupnosti reálných čísel a necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$ . Pak platí:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$ ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ ,
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ , jsou-li pravé strany definovány.

**Věta 3** (O dvou policajtech). Necht'  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

$$(i) \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A.$$

**Věta 4** (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti). Necht'  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jsou dvě posloupnosti reálných čísel, necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  a  $\{b_n\}$  je omezená. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

**Hinty**

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

$$(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n$$

$$1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

$$\frac{1}{k(k + 1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k - 1)(k + 1)}{k^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n - 1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}$$

**Příklady**

1. Určete limity

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} n$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} e^n$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}$$

$$(k) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n$$

$$(l) \lim_{n \rightarrow \infty} n!$$

2. Určete limity

(a)  $(-1)^n$       (b)  $(-1)^n n$       (c)  $(-1)^n \frac{1}{n}$       (d)  $\cos(\pi n) \sqrt{n}$

3. Spočtěte limity

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{n}}$       (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n - 5}{n^2 + 8}$   
(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3 + 1}}$       (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1}$   
(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^8 + 2n^3 - 4$       (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) + \cos(n^2)}{n^2 - 3}$   
(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$

4. Spočtěte limitu

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$       (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}}$   
(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$       (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$   
(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$       (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+3n-1} - n^2}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2-1}}$

5. Spočtěte limity

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right\}$       (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$   
(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} \right\}$

## Bonus

6. Spočtete limity

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+\dots+a^n}{1+b+\dots+b^n}, \quad \text{kde } |a|, |b| < 1$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}$$

(g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

(h)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{sin\ x}}{\mathbf{n}} &= \\ \frac{\mathbf{sin\ x}}{\mathbf{n}} &= \\ \mathbf{six} &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

Figure 1: <http://laughtingjoke.blogspot.com/2010/04/sin-x.html>