

## 4. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>  
kytaristka@gmail.com

### Hinty

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

### Příklady

1. Určete z **definice** následující limity (či jejich neexistenci)

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} x \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}$$

2. Spočtěte limity

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x & (f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x + 1} & (j) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \\ (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3)^2 & (g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} & (k) \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-3) \\ (c) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} & (h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x-1)^2} & (l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{-8 - x} & (i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x + 5 + \frac{1}{x}}{8x^3 + 4x^2 - 3} & (m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x + x}{2x^3 + x^2 - 2x} \\ (e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{6}{x - 5} & & \end{array}$$

3. Spočtěte limity

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} & (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos \left( \frac{x+3}{\sqrt{x}-1} \right) & (g) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cos x \\ (b) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x & (e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} & (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x} \\ (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} & (f) \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \cos x) & (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x} \end{array}$$

4. Spočtěte limity

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} & (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} & (f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} \\ (\lim \sqrt{\phantom{x}} = \sqrt{\lim}) & (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x} & (g) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) \\ (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} & (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & (h) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + 3x - 8 \end{array}$$

## Bonus

### 5. Spočítejte limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \text{ kde } m, n \in \mathbb{N}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x - 1}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ kde } a > 0$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - x \right)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/3} \left[ (x + 1)^{2/3} - (x - 1)^{2/3} \right]$$

### 6. Proč ten vtíp není dobře?

#### Know your limits

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x - 8} = \infty.$$

Therefore

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x - 5} = \infty.$$

Figure 1: <https://kityates.com/public-engagement/>