

## 8. cvičení

<http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/>, [kytaristka@gmail.com](mailto:kytaristka@gmail.com)

### Teorie

**Věta 1** (l'Hospitalovo pravidlo). Necht'  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $f, g$  jsou reálné funkce a existuje  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Jestliže navíc platí

- (a)  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ , nebo
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = \infty$ ,

potom

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Věta 2** (Heineova). Necht'  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$  a necht' funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}$ , je definována na nějakém prstencovém okolí bodu  $a$ . Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

- (i)
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A;$$
- (ii) Pro každou posloupnost  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , splňující  $x_n \in M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

### Příklady

1. Spočtěte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy l'Hospital pomůže.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin \frac{x^{60} + 3x - 4}{x^{40} - 2x + 1}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotg x - 1}{x^2}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$

(k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$

Použijte l'Hospitala pro  $1/n = x \rightarrow 0+$

(l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi) \frac{n^k}{e^{an}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ .

Schovejte si kosinus a pak použijte  $k$ -krát l'Hospitala

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left( \sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$ ,  
 $a, b > 0$

2. Rozhodněte, zda je funkce  $f(x) = \frac{x \cos 2x \sin 3x}{x^2 - \pi^2}$ ,  $f(\pi) = -\frac{1}{2}$ , spojitá v  $\pi$ .

### Bonus

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sin x}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n},$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cotg x - \frac{1}{x}$$

$c > 1$ .

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

### Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left( 2 \cos \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4} \right)$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \arctan \sqrt{n}}{\sin \operatorname{arccot} \sqrt{n}}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{\arcsin x - \sin x}$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)^{\sqrt{n^2+1}}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2}$

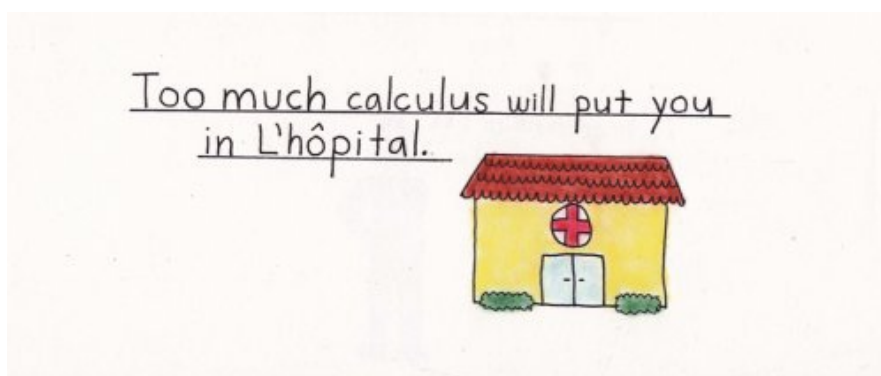


Figure 1: <https://twitter.com/everydaycalc/status/722795700795277314>