

## 9. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

**Řešení:** Užijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{2 \cdot 2^n n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$1/2 < 1$ , tedy řada konverguje.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$$

**Řešení:** Použijeme odmocninové kritérium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt[2]{4^n + 9^n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt[2]{9^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{3} - 1)$$

**Řešení:** Otestujeme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Je vidět, že posloupnost je neklesající, tedy z Leibnize řada konverguje.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

**Řešení:**

Otestujeme nejprve nutnou podmínku konvergence. Použijeme větu a převedeme  $n$ -tou odmocninou na podíl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$$

**Řešení:** Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2}{2(n+1)^2} \frac{2n^2}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Řada konverguje.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2 + (-1)^k}{7} \right)^k$$

Použijeme zobecněné odmocninové kritérium. Je

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left( \frac{2 + (-1)^k}{7} \right)^k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^k}{7} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1,$$

(dokonce rovnost), řada tedy konverguje. Limes superior je nutno použít, protože limita by neexistovala, zato limes superior existovat musí.

(g)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$$

**Řešení:** Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť  $\frac{1}{\ln k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Posloupnost  $\frac{1}{\ln k}$  je zjevně nerostoucí.

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

**Řešení:**  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$  Podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!n!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2}$$

**Řešení:** Řada nespĺňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^n$$

**Řešení:** Odmocninové kritérium, verze (a).

$$\left| \frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right| \leq \frac{2}{3}$$

Tuto nerovnost ověřte! Našli jsme  $q < 1$ , které omezuje posloupnost  $a_n \forall n$ , tedy řada konverguje.

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

**Řešení:**

Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

**Řešení:**

Řada nekonverguje, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}$$

**Řešení:** Použijeme odmocninové kritérium

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n^2-1} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot 1 < 1, \end{aligned}$$

tedy řada konverguje.

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad,  $x \in \mathbb{R}$ :

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

**Řešení:** Pro  $|z| < 1$  konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}| |z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}| |z|^n}{n}} = \lim \frac{|z|}{1} \frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro  $|z| > 1$  diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová.

Pro  $z = 1$  řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost  $\{\frac{1}{n}\}$  je monotónní a konverguje k nule.

Pro  $z = -1$  řada diverguje, neboť  $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$  a řada  $\sum -\frac{1}{n}$  je harmonická s minusem.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

**Řešení:**

Pro  $|x| < 1$  konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud  $|x| \geq 1$ , nekonverguje, neboť  $\lim k^4 |x|^k = +\infty$ , a proto není možné, aby  $\lim k^4 x^k = 0$ .

3. Necht'  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  je konvergentní,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  jsou divergentní. Rozhodněte, zda platí:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$  je konvergentní. NE
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$  je divergentní. NE
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$  je konvergentní. ANO
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$ , kde  $k, l \in \mathbb{R}$  je konvergentní. ANO
- (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  je konvergentní. NE
- (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$  je konvergentní. NE
- (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$  je konvergentní. NE



$$\textcircled{g} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$$

↓ Ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}} \right|}{\left| (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{100}}_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Leby Fada Ak

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$$

Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n^2/n}}{(n+1)^{(n^2+1)/n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1/n}} \stackrel{\text{WZL}}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

↓  
konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$$

↓  
1

2. polierig

$$\textcircled{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n} + 1)}{\ln(2^{4^n} + 1)}$$

↓ 4e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(2^{2^{n+1}} + 1)}{\ln(2^{4^{n+1}} + 1)}}{\ln(2^{2^n} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{2^{n+1}} + 1)}{\ln(2^{2^n} + 1)} \cdot \frac{\ln(2^{4^n} + 1)}{\ln(2^{4^{n+1}} + 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2^{2^{n+1}}} + 1\right))}{\ln(2^{2^n} \left(\frac{1}{2^{2^n}} + 1\right))} \cdot \frac{\ln(2^{4^n} \left(\frac{1}{2^{4^n}} + 1\right))}{\ln(2^{4^{n+1}} \left(\frac{1}{2^{4^{n+1}}} + 1\right))} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)} \cdot \frac{4^n \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^{n+1} \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln 2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n}}{\ln 2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)}{2^n}} \cdot \frac{\ln 2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^n}}{4 \ln 2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}{4^n}}$$

↓  
0

$$\text{VOAL} = \frac{2 \ln 2 + 0}{\ln 2 + 0} \cdot \frac{\ln 2 + 0}{4 \ln 2 + 0} = \frac{1}{2} < 1$$

Σ konverguje