

## 8. cvičení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA2.php>

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	$e^{kx}$
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	$a^{kx}$
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan(kx)$	$\arctan(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \operatorname{arcctg}(kx)$	$\operatorname{arcctg}(kx)$	$P(x)$

### Příklady

Určete primitivní funkci k funkci  $f(x)$  na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

#### 1. Substituce

(a)  $\int \sin^5 x \cos x \, dx.$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \sin x$ . Pak  $dy = \cos x \, dx$  a platí

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx = \int y^5 \, dy \stackrel{C}{=} \frac{y^6}{6} = \frac{\sin^6 x}{6}$$

(b)  $\int -2xe^{-x^2} \, dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = -x^2$ . Potom  $dy = -2x \, dx$  a platí

$$\int -2xe^{-x^2} \, dx = \int e^y \, dy \stackrel{C}{=} e^y = e^{-x^2}$$

(c)  $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = 1 + x^2$ . Potom  $dy = 2x \, dx$  a platí

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

(d)  $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \arcsin x$ , potom  $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$  a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\arcsin x}$$

#### 2. Per partes

(a)  $\int x \cos x \, dx$

**Řešení:** Per partes:  $u' = \cos x$ ,  $u = \sin x$ ,  $v = x$ ,  $v' = 1$ .

$$\int x \cos x \, dx = [x \sin x] - \int \sin x \, dx \stackrel{C}{=} x \sin x + \cos x$$

(b)  $\int x e^{-x} \, dx$

**Řešení:** Per partes:  $u' = e^{-x}$ ,  $u = -e^{-x}$ ,  $v = x$ ,  $v' = 1$ .

$$\int x e^{-x} \, dx = [-x e^{-x}] - \int -e^{-x} \, dx \stackrel{C}{=} -x e^{-x} - e^{-x}$$

(c)  $\int e^x \sin x \, dx$

**Řešení:**

Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$2 \int e^x \sin x \, dx \stackrel{C}{=} -e^x \cos x + e^x \sin x$$

tedy

$$\int e^x \sin x \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x)$$

### 3. Směs

(a)  $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \frac{1}{x}$ . Potom  $dy = -\frac{1}{x^2} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx = - \int \sin y \, dy \stackrel{C}{=} \cos y = \cos \frac{1}{x}$$

(b)  $\int \ln x \, dx$

**Řešení:**

Položme  $u' = 1$ ,  $v = \ln x$ . Potom  $u = \int 1 \, dx = x$  a  $v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$  a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \stackrel{C}{=} x \ln x - x$$

$$(c) \int \frac{e^x}{2 + e^x} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = e^x$ . Potom  $dy = e^x dx$  a platí

$$\int \frac{e^x}{2 + e^x} dx = \int \frac{dy}{2 + y} \stackrel{C}{=} \ln |2 + y| = \ln(2 + e^x)$$

$$(d) \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \ln(\ln x)$ . Potom  $dy = \frac{1}{x \ln x} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \int \frac{1}{y} dy \stackrel{C}{=} \ln |y| = \ln(|\ln(\ln x)|)$$

$$(e) \int \arcsin x dx$$

**Řešení:**

Per partes:  $u' = 1$ ,  $u = x$ ,  $v = \arcsin x$ ,  $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\int 1 \cdot \arcsin x dx = [x \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce  $y = 1 - x^2$ .

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy \stackrel{C}{=} x \arcsin x + \sqrt{y} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$(f) \int \frac{x}{3-2x^2} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = 3 - 2x^2$ . Potom  $dy = -4x dx$  a platí

$$\int \frac{x}{3-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \ln |y| = -\frac{1}{4} \ln |3 - 2x^2|$$

$$(g) \int x^2 \sin 2x dx$$

**Řešení:**

První per partes:  $u' = \sin 2x$ ,  $u = -\frac{1}{2} \cos 2x$ ,  $v = x^2$ ,  $v' = 2x$ .

$$\int x^2 \sin 2x dx = \left[ -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \right] + \int x \cos 2x =$$

Druhé per partes:  $u' = \cos 2x$ ,  $u = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $v = x$ ,  $v' = 1$ .

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \left[ \frac{1}{2} x \sin 2x \right] - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$(h) \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

**Řešení:**

Pro  $a = b = 0$  je  $\int e^{0x} \cos(0x) \, dx = \int 1 \, dx \stackrel{C}{=} x$ .

Nyní předpokládejme, že  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat.

Platí

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro  $b = 0$ , pokud  $a \neq 0$ , a také pro  $a = 0$ , pokud  $b \neq 0$ .

$$(i) \int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} \, dx$$

**Řešení:**

Použijeme substituci  $y = \cotg x$ . Potom  $dy = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} \, dx = - \int \frac{dy}{y^{1/4}} \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} y^{3/4} = -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cotg^3 x}$$

$$(j) \int \cos(\ln x) \, dx$$

**Řešení:** Použijeme integraci per partes, položíme  $v' = 1$ ,  $u = \cos(\ln x)$ . Potom  $v = x$  a  $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$ . Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na  $v' = 1$  a  $u = \sin(\ln x)$  a dostaneme

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

$$(k) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = 1 - x^2$ , pak  $dy = -2x dx$ . Dostaneme

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{-2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\frac{1}{2} 2\sqrt{y} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

$$(l) \int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$$

**Řešení:** Per partes:  $u' = \sin x$ ,  $u = -\cos x$ ,  $v = \ln(\operatorname{tg} x)$ ,  $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$ .

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x} dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Na poslední integrál použijeme substituci  $y = \cos x$ ,  $dy = -\sin x dx$ :

$$-\int \frac{1}{1-y^2} dy = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

tedy celkem

$$\stackrel{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$(m) \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \arctan x$ , potom  $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$  a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int y dy \stackrel{C}{=} \frac{y^2}{2} = \frac{\arctan^2 x}{2}$$

$$(n) \int x^2 \arccos x dx$$

**Řešení:** Per partes:  $u' = x^2$ ,  $u = \frac{x^3}{3}$ ,  $v = \arccos x$ ,  $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\int x^2 \arccos x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \arccos x \right] + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce  $y = 1 - x^2$ , odkud plyne  $dy = -2x dx$  a  $x^2 = 1 - y$ .

$$= \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{6} \int \frac{y-1}{\sqrt{y}} dy = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{6} \int \left( \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{9} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^{1/2} = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{9} (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{1/2}$$

$$(o) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \cos x$ . Pak  $dy = -\sin x dx$  a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx = - \int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \stackrel{C}{=} 2y^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

$$(p) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx$$

**Řešení:** První per partes:  $u' = \sqrt{x}$ ,  $u = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ,  $v = \ln^2 x$ ,  $v' = 2 \ln x \frac{1}{x}$ .

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x \right] - \int \frac{4}{3}x^{1/2} \ln x dx =$$

Druhé per partes:  $u' = \frac{4}{3}x^{1/2}$ ,  $u = \frac{8}{9}x^{3/2}$ ,  $v = \ln x$ ,  $v' = 1/x$ .

$$= \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x \right] - \left[ \frac{8}{9}x^{3/2} \ln x \right] + \int \frac{8}{9}x^{1/2} dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x - \frac{8}{9}x^{3/2} \ln x + \frac{16}{27}x^{3/2}$$

$$(q) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \ln x$ . Pak  $dy = \frac{1}{x} dx$  a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int y^2 dy \stackrel{C}{=} \frac{y^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3}$$

$$(r) \int x^3 e^{-x^2} dx$$

**Řešení:**

Provedeme substituci  $y = x^2$ . Pak  $dy = 2x dx$  a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int y e^{-y} dy =$$

Nyní aplikujeme per partes:  $u' = e^{-y}$ ,  $u = -e^{-y}$ ,  $v = y$ ,  $v' = 1$ .

$$= [-ye^{-y}] + \int e^{-y} dy \stackrel{C}{=} -ye^{-y} - e^{-y} = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}$$

$$(s) \int \operatorname{tg} x dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \cos x$ . Potom  $dy = -\sin x dx$  a platí

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\ln |y| = -\ln |\cos x|$$

$$(t) \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

**Řešení:** Pracujeme na intervalu  $x \in (0, \infty)$ . Použijeme substituci  $y = \sqrt{x}$ . Potom  $y^2 = x$ ,  $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy \stackrel{C}{=} 2\arctan y = 2\arctan \sqrt{x}$$

$$(u) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

**Řešení:** Vztah upravíme a použijeme substituci  $y = e^x$ ,  $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{dy}{1+y^2} \stackrel{C}{=} \arctan y = \arctan e^x$$

$$(v) \int \frac{1}{\sin x} dx$$

Použijeme substituci  $y = \cos x$ . Potom  $dy = -\sin x dx$  a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = - \int \frac{dy}{1-y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

$$(w) \int \cos^3 x dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \sin x$ . Potom  $dy = \cos x dx$  a platí

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - y^2) dy \stackrel{C}{=} y - \frac{y^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$(x) \int \frac{x}{4+x^4} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = x^2$ . Potom  $dy = 2x dx$  a platí

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{8} \int \frac{dy}{1+(y/2)^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2}$$

$$(y) \int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$$

**Řešení:** Nejprve použijeme substituci  $y = e^x$ ,  $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}}$$

pak výraz rozšíříme, abychom mohli použít substituci  $t = 1 + y^2$ ,  $dt = 2y dy$ :

$$= \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2y}{2y^2\sqrt{1+y^2}} dy = \int \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}} dt.$$

Nyní substituujeme  $s = \sqrt{t}$ , pak  $ds = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ . Nakonec použijeme tabulkový integrál:

$$\int \frac{1}{s^2-1} dt \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right|.$$

Nakonec vrátíme substituce:

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right| = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}}$$

(z)  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

**Řešení:** Per partes:  $u' = \frac{1}{x^2}$ ,  $u = -\frac{1}{x}$ ,  $v = \arcsin x$ ,  $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \arcsin x \right] + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Potom  $dy = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  a  $x^2 = 1-y^2$ .

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{1-y^2} dy \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$