

10. cvičení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA2.php>
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci). Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b) , která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci). Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh(x+y) = \sinh(x) \cdot \sinh(y) + \cosh(x) \cdot \cosh(y)$$

$$\sinh(x+y) = \cosh(x) \cdot \sinh(y) + \sinh(x) \cdot \cosh(y)$$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

(b) $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

(d) $f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

2. Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

(d) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

3. Směs

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

(c) $f(x) = \sin \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

• (2b) $x = a \cosh t$	• (3d) $x = \frac{1}{t^2}$, tedy $x' = -\frac{2}{t^3}$
• (2a) $x = a \sinh t$	• (3c) $x = \sqrt{t}$, tedy $x' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$
• (1d) $x = a \sinh t$ nebo $a \tan t$	• (3b) $y = \sqrt{4-t}$, tedy $x = \frac{t}{4} + \frac{t}{4}$
• (1c) $x = a \sin t$ nebo ...	• (3a) $y = \sqrt{1+e^x}$, tedy $x = \ln(t^2 - 1)$
• (1b) $x = \sin t$ nebo $\cos t$	• (2d) $x = a \sinh t$
• (1a) $x = \sin t$ nebo $\cos t$	• (2c) $x = \sqrt{2} \cosh t$