1a $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

probl. body "0", "∞"

0: $\sqrt{1+x^3} \approx 1$

$\sin x^2 \approx x^2$

$g(x) = x^2$

$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 \quad 1 \in (0,\infty)$

$\int_0^2 f \text{ k} \iff \int_0^2 x^2 \text{ k} \quad \checkmark$

"∞"

$|\sin x^2| \le 1$

$$\int_2^\infty \frac{|\sin x^2|}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \le \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$$

$g(x) = 1/x^{3/2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim \sqrt{\frac{x^3}{1+x^3}} = 1 \in (0,\infty)$$

$\frac{x^3}{1+x^3} \to \frac{1}{1+0}$

$\int_2^\infty f \text{ k} \iff \int_2^\infty x^{-\frac{3}{2}} \text{ k}$

$-\frac{3}{2} < -1 \quad \checkmark$

Zaver $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ k

6b i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^a x \,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^a x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^a x\,dx$

Integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, potenciálně problematické jsou oba kraje.

v 0: $\operatorname{tg} x = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}\cdot \underbrace{x}_{\to 0}$ $\qquad \operatorname{tg}^a x = \underbrace{\frac{\sin^a x}{x^a}}_{\to 1}\cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^a x}}_{\to 1}\cdot x^a$

Srovnávat tedy budeme s x^a: $\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{tg}^a x}{x^a} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin^a x}{x^a}\cdot\frac{1}{\cos^a x} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1\cdot 1=1$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^a x\,dx$ KONV. $\iff \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^a\,dx$ KONV. $\iff a>-1$

v $\frac{\pi}{2}$: $\operatorname{tg}x = \underbrace{\sin x}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ $\qquad \operatorname{tg}^a x = \underbrace{\sin^a x}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^a}_{\to 1}\cdot\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}$

Taylor v $\frac{\pi}{2}$ pro $\cos x$: $\cos x = -\sin(x)\,(x-\frac{\pi}{2}) + o((x-\frac{\pi}{2})^2) = (\frac{\pi}{2}-x)\cdot(1+o((\frac{\pi}{2}-x)))$

Srovnávat tedy budeme s $\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}$: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\operatorname{tg}^a x}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\sin^a x\cdot\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^a \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^a x$ KONV. $\iff \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-a}dx$ KONV. $\iff \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^{-a}\,dy$ KONV $\iff -a>-1 \iff a<1$

subs. $y=\frac{\pi}{2}-x$

ZÁVĚR: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^a x\,dx$ KONV. pro $a\in(-1,1)$

DIV. pro $a\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

ÚLOHA 2

a) $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}}e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\,dy$ $\qquad$ Integrand $y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}$ je spojitý na $(0,\infty)$.

subst. $\sqrt{x} = y$ $\qquad x\in(0,\infty)\mapsto y\in(0,\infty)$ bijekce

$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dy$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}}\in(0,\infty)\ \forall x\in(0,\infty)$

v 0: $e^{-y}\xrightarrow[y\to 0+]{}1 \Rightarrow$ srovnáme s $y^{-\frac{1}{2}}$: $\lim_{y\to 0+}\frac{y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}}{y^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{y\to 0+}e^{-y}=1$

$\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}$ KONV. $\iff \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}$ KONV., tedy v 0 integrál konverguje

v ∞: $y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\le e^{-y}\quad \forall y\ge 1$

$0\le\int_1^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\le\int_1^\infty e^{-y} = e^{-1}<\infty \Rightarrow$ KONV, tedy v ∞ integrál rovněž konverguje

ZÁVĚR: $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}}e^{-\sqrt{x}}\,dx$ KONVERGUJE

e) $\int_0^1 x^{-\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,1]$.

v 0: $\ln^2 x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty \Rightarrow e^{-\ln^2 x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$ ... integrand lze spojitě rozšířit na $[0,1]$, je tedy omezený $\Rightarrow$ KONV.

---

f) $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty) \Rightarrow$ nutno vyšetřit oba krajní body

v 0: $\operatorname{arctg} x = x + o(x) = x\cdot(1+o(1))$ .. Maclaurin 1. stupně

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot x}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV. $\qquad \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV.

$|\sin\frac{1}{x}| \le 1 \Rightarrow \int_0^1 |\sin\frac{1}{x}|dx \le \int_0^1 1\,dx = 1 \Rightarrow$ ABS. KONV.

v ∞: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0_+$, $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0+]{} 1$, $\operatorname{arctg} x \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2}}{x}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}}{x}dx = \int_1^\infty \frac{c}{x^2}dx \text{ KONV.}$$

Zadaný integrál tedy konverguje

1c g) $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\pi)$, v krajních bodech utíká do $-\infty$.

v 0: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1$ ... slušné srovnat $\ln(\sin x)$ s $\ln x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\sin x}{\ln x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim \cos x\cdot\frac{x}{\sin x} \overset{VoAL}{=} 1$$

$\int_0^1 \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \ln x\,dx$ KONV. $\qquad \int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ KONV.

v π: $\frac{\sin x}{\pi - x} \xrightarrow[x\to\pi-]{} 1$ ... plyne z Taylorova rozvoje sinu v bodě π.

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\ln\sin x}{\ln(\pi-x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\pi-x}} = \lim_{x\to\pi-} (-\cos x)\cdot\frac{\pi-x}{\sin x} \overset{VoAL}{=} 1$$

$\int_1^\pi \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_1^\pi \ln(\pi-x)\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^{\pi-1} \ln y\,dy$ KONV.
subst. $y=\pi-x$

ZÁVĚR: $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ KONVERGUJE

1d)

$$\int_1^{\infty} \sin x^{\alpha} \, dx$$

• $\alpha = 0$ $\qquad \int_1^{\infty} \sin 1 \, dx = \infty \qquad D$

• $\alpha < 0$ $\qquad$ u 1 je fce spoj

u ∞: $\quad \sin x^{\alpha}$ srovnalme s x^{α}

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x^{\alpha}}{x^{\alpha}} = 1$$

$x^{\alpha} \to 0 \qquad$ VOLSF (D)

$$\int_1^{\infty} \sin x^{\alpha} \text{ Ak} \iff \int_1^{\infty} x^{\alpha} \, dx \text{ Ak} \iff \boxed{\alpha < -1}$$

• $\alpha > 0$ $\qquad$ substituce $\quad x^{\alpha} = t$

$x = t^{1/\alpha}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha - 1} \sin t \, dt \quad \underline{\text{Ak}} \iff -\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) > 1$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\sin t}{t^{1 - 1/\alpha}} \, dt \qquad\qquad 0 > \frac{1}{\alpha}$$

$\boxed{0 > \alpha}$ ale $\boxed{\alpha > 0}$

Tedy $\int$ Absolutně konverguje pro $\alpha < -1$

což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_1^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 \ , \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$. ||

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$ konverguje !

|| Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův ! ||

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x \ , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} \ , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \ ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \ , \ \ldots$$

(1e)

3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

|| 1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$, je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$. Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:
existuje takové x_0 , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$.
Proč?
Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 \ ,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.
Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,

tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě (L) $\int_0^\infty e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^R_{(0,+\infty)}$/

a (N) $\int_0^\infty e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,

že $0 \leq \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .‖

3,33. Dokažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^R_{(1,2)}$.

2/ Protože

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \text{ , tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \text{ ,}$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} \text{ .}$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy

i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.

Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .‖

3,34. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$!

1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^R_{(0,+\infty)}$.

2/ Protože $\lim_{x\to 1_-} \frac{1}{1-x^3}(1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\frac{1}{1+x+x^2}$

4. Konvergence určitého integrálu

Budeme se zabývat následující úlohou. Nechť funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) (omezeném či neomezeném). Existuje integrál $\int_a^b f$ (zobecněný Riemannův či Newtonův – kteréžto dva pojmy pro takové funkce splývají)? V případě, že $\int_a^b f$ existuje (tj. je roven nějakému reálnému číslu), řekneme, že integrál konverguje. V opačném případě řekneme, že diverguje. Pokud konverguje integrál $\int_a^b |f|$, řekneme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně. Pokud integrál konverguje, ale nikoli absolutně, říkáme, že konverguje neabsolutně. Budeme se držet této terminologie spíše než pojmů „existuje" a „neexistuje", protože tyto pojmy mají u jiných integrálů (např. Lebesgueova) jiný význam. Porovnejte pojmy divergence, konvergence a absolutní konvergence s analogickými pojmy pro řady.

§20. První metodou je použití věty, která říká, že *je-li f funkce* **spojitá na uzavřeném intervalu** $[a, b]$, *pak $\int_a^b f$ konverguje* (viz např. §10).

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_7^{50} \operatorname{arctg}(x^5 + 16) \cdot \sin x \, dx$ konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[7, 50]$.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$ konverguje, protože funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

je spojitá na $[0, 1]$. Zde využíváme toho, že integrál z funkce f od a do b závisí jen na hodnotách f na (a, b) a ne na tom, zda a případně jak je f definována v krajních bodech. Můžeme-li ji tam však dodefinovat spojitě, pak lze použít výše uvedenou větu.

§21. Další možností je **výpočet určitého integrálu** s využitím primitivní funkce dle §11. Z výpočtů v §11 plyne tvrzení v následujícím příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ konverguje, právě když $\alpha > -1$.

Výpočet druhého příkladu je zcela analogický, a tak ho necháváme na čtenáři.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx$ konverguje, právě když $\alpha < -1$.

Uvedené dva příklady jsou užitečné pro vyšetřování konvergence mnoha jiných integrálů, jak uvidíme později.

(1.e) <u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_0^1 \log x \, dx$ konverguje, protože

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1 \, dx = -1.$$

(1g) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{\sin x^p}{x^q}}_{f} dx$

- $f(x)$ spoj na $(0,1]$
- problém v 0

◦ pro $q<1$ ze SK $\left|\frac{\sin x^p}{x^q}\right| \le \frac{1}{x^q}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} \ k \ \Rightarrow \int_0^1 f \ k \text{ pro } \forall p$$

◦ pro $q \ge 1$

- $p>0$ LSK s $g(x) = \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\sin x^p|}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow \text{konv. pro } p-q > -1$$

- $p=0$ $f(x) = \frac{\sin 1}{x^q}$ k pro $q<1$ (ale my jsme v $q \ge 1$)

- $p<0$

Substituce $y = x^p$ $dy = p x^{p-1} dx$

$$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q} dx = \int_\infty^1 \frac{\sin y}{y^{q/p}} \frac{1}{p} y^{1/p - 1} dy =$$

$$= -\frac{1}{p}\int_1^\infty \sin y \cdot y^{\frac{1}{p} - 1 - q/p} \quad \text{AK} \Leftrightarrow 1 + \frac{q}{p} - \frac{1}{p} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{q-1}{p} > 0$$

<u>ZÁVĚR</u> AK pro $(q<1, p\in\mathbb{R}) \vee (q \ge 1, p>0, p-q>-1) \vee \underbrace{\begin{pmatrix} p<0, q\ge 1 \\ \frac{q-1}{p} > 0\end{pmatrix}}_{\emptyset}$

tedy $(q<1, p\in\mathbb{R}) \vee (q\ge 1, p > q-1)$

1a

Př:

$$\int_0^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,dx \qquad \alpha, k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}$$ nezáporná, spojitá na $(0,1)$ a $(1,\infty)$

v bodě 1: co když $\alpha < 0$? pak ~~...~~ problém

Singularita: $0, 1, \infty$

"0": $k \geq 0$ $\quad x^k \leq 1 \quad$ 1 vede nad x^k

$k < 0$ $\quad x^k > 1 \quad$ x^k vede nad 1

! bývá výhodné vytknout vedoucí člen

$$\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k} = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k(1+x^{-k})}$$

• $k \geq 0$ $\qquad g(x) = |\ln x|^\alpha$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases} \in (0,\infty)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \text{ k} \iff \int_0^{1/e} |\ln x|^\alpha\,dx \text{ k} \iff \alpha \in \mathbb{R}$$
(srovnání x^0)

• $k < 0$ $\qquad g(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \lim \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \text{ k} \iff \int_0 \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k} \quad k<0 \text{ k} \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

celkem: u 0 konv. $\forall k, \alpha \in \mathbb{R}$

1a) "1"

jmenovatel je kamarád :) $1+x^k \to 2 \quad \forall k$

$|\ln x|^\alpha \approx |1-x|^\alpha$ neb $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$g(x) = (1-x)^\alpha$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$

$\overset{P}{\circ}$ nutno vyšetřit z obou stran

- $\int_{1/e}^{1} f(x)$ k $\iff \int_{1/e}^{1} g(x)\,dx$ k $\iff \int_{1/e}^{1} (1-x)^\alpha$ k $\iff \alpha > -1$

- $\int_{1}^{e} f(x)\,dx$ k $\iff$ $\alpha > -1$

"∞"

- $k \geq 0$ $\quad 1+x^k \approx x^k \quad 1+x^k = x^k(1+x^{-k})$

$g(x) := \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1 & k \neq 0 \\ 1/2 & k = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$

$\int_e^\infty f(x)\,dx$ k $\iff \int_e^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}\,dx \iff$ buď $k > 1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$ nebo $k = 1 \quad \alpha < -1$

- $k < 0$ $\quad g(x) := |\ln x|^\alpha \quad 1+x^k \approx 1$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\int_e^\infty f(x)\,dx$ k $\iff \int_e^\infty |\ln x|^\alpha$ k $\iff$ NIKDY

Závěr $\int_0^\infty f(x)\,dx$ k $\iff$ $k > 1$ & $\alpha > -1$

(1i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$

$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ → funkci lze tedy spojitě rozšířit do 0

→ spojitá na kompaktu → Ač

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,
tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .
Zřejmě (L) $\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$/
a (N) $\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,
že $0 \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .||

(1j) **3,33. Dokažte, že** $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

1/ Opět ukažte, že $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^{R}_{(1,2)}$.

2/ Protože

$$\lim_{x \to 1+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}\text{ , tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1 ,$$

je podle 3,25 $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} .$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy
i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.
Ze vztahu $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .||

3,34. Dokažte, že $\int_0^1 \dfrac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$!

1/ Opět $\dfrac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Protože $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{1}{1-x^3}\,(1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,
plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

Řešení. Platí totiž $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 1$ konverguje (viz §21). Proto podle srovnávacího kritéria $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x$ konverguje. Tedy i původní integrál konverguje (dokonce absolutně). ■

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \mathrm{d}x$ diverguje.

Řešení. Pro $x \in (1, \infty)$ je totiž $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \geq \frac{\operatorname{arctg} 1}{x} = \frac{\pi}{4x} \geq 0$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x} \mathrm{d}x$ diverguje. ■

§25. Užitečnou variantou srovnávacího kritéria je **limitní srovnávací kritérium.**

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b)$ (kde $-\infty < a < b \leq +\infty$), funkce g nechť je kladná na $[a, b)$.

(i) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ také konverguje (dokonce absolutně).

(ii) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.

Analogická tvrzení platí pro interval typu $(a, b]$.

<u>Příklad</u> Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Funkce $f(x) = \sin^\alpha x$ a $g(x) = x^\alpha$ jsou spojité a kladné na $(a, b] = (0, \pi/2]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha} = 1,$$

tedy integrál ze zadání konverguje, právě když konverguje $\int_0^{\pi/2} x^\alpha \,\mathrm{d}x$. Ten ovšem konverguje právě pro $\alpha > -1$. To můžeme ověřit přímým výpočtem. Plyne to též z prvního příkladu v §21 s použitím faktu, že $\int_1^{\pi/2} x^\alpha \,\mathrm{d}x$ konverguje dle §20.

Závěr je, že integrál konverguje právě pro $\alpha > -1$. ■

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Řešení. Integrand je spojitý na $(0, \pi]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}.$$

Tedy vyšetřovaný integrál konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Ten ovšem diverguje, tudíž diverguje i původní integrál. ■

<u>Příklad</u> Pro které hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \,\mathrm{d}x$?

(12) *Řešení.* Integrand je spojitý na $(0, +\infty)$. Využijeme toho, že integrál $\int_0^\infty$ konverguje, právě když konvergují oba integrály $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$.

Na intervalu $(0, 1]$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1$, a tedy $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \, dx$, což je právě když $\alpha + \beta > -1$.

I na intervalu $[1, \infty)$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^\alpha} = (\pi/2)^\beta$, tudíž $\int_1^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$, což je právě když $\alpha < -1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1 < \alpha + \beta$. ■

§26. Dále můžeme použít některé věty používané při výpočtu určitého integrálu, konkrétně **metodu per partes** z §12 a **věty o substituci** podle §13 a zvláště §14.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ konverguje, právě když $\alpha > 0$.

Řešení. Již víme z §24, že pro $\alpha > 1$ tento integrál konverguje absolutně. Z §23 dále víme, že pro $\alpha \le 0$ integrál diverguje. Pro $\alpha \in (0, 1]$ (nebo rovnou pro všechna $\alpha > 0$) můžeme použít metodu per partes. Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} \, dx,$$

jsou-li aspoň dva ze tří uvedených výrazů reálným číslem. Přitom zobecněný přírůstek na pravé straně je reálným číslem pro každé $\alpha > 0$ a integrál na pravé straně pro $\alpha > 0$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria. Tedy i integrál na levé straně konverguje. ■

<u>Příklad</u> Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$?

Řešení. Pokud $\alpha < 0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$, a tedy integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$. To je právě pro $\alpha < -1$.

Pro $\alpha = 0$ integrál diverguje, protože je to integrál z nenulové konstantní funkce $\sin 1$ na neomezeném intervalu.

Zbývá vyšetřit případ $\alpha > 0$. Použijme druhou substituční metodu z §14 pro funkci $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$. Pak

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t \, dt,$$

pokud aspoň jeden z integrálů konverguje. Přitom integrál na pravé straně podle předchozího příkladu konverguje, právě když $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0$, tj. $\alpha > 1$.

ÚLOHA 1

a) $\int_0^1 x^a\,dx = \begin{cases} \overset{a=-1}{} [\ln x]_0^1 = 0-(-\infty) = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \overset{a\neq -1}{} \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \begin{cases} \overset{a>-1}{} \frac{1}{a+1} - \frac{0}{a+1} = \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a<-1}{} \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\overset{\alpha\in\mathbb{R}^+}{} \int_0 x^a\,dx$ — KONV. pro $a>-1$, DIV. pro $a\leq -1$

---

b) $\int_1^\infty x^a\,dx = \begin{cases} \overset{a=-1}{} [\ln x]_1^\infty = +\infty - 0 = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \overset{a>-1}{} \frac{\infty}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \overset{a<-1}{} \frac{0}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\int_\alpha^\infty x^a\,dx$, $\alpha>0$ — KONV. pro $a<-1$, DIV. pro $a\geq -1$

(R c) $\int_0^\infty x^a + x^b\,dx = \circledast$

$\int_0^\infty x^a\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^a\,dx}_{=:I_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^a\,dx}_{=:I_2}$ $\quad$ $I_1<\infty \iff a>-1$, $I_2<\infty \iff a<-1$ $\Rightarrow I_1+I_2 = +\infty \ \forall a\in\mathbb{R}$

$\circledast = \int_0^\infty x^a\,dx + \int_0^\infty x^b\,dx = \underset{\forall a\in\mathbb{R}}{(+\infty)} + \underset{\forall b\in\mathbb{R}}{(+\infty)} = +\infty$

---

d) $\int_0^{e^{-1}} \frac{|\ln x|^a}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} |y|^a\,dy = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a<-1}{} \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a\geq -1}{} +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$

subst. $y=\ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$ $\quad x\in(0,e^{-1}) \mapsto y\in(-\infty,-1)$

$\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(0,e^{-1})$

---

e) $\int_1^e \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_0^1 y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a\leq -1}{} +\infty \Rightarrow \text{DIV} \\ \overset{a>-1}{} \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases}$

$y=\ln x$, $dy=\frac{dx}{x}$ $\quad x\in(1,e)\mapsto y\in(0,1)$

$\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

---

f) $\int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a<-1}{} \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a\geq -1}{} +\infty \Rightarrow \text{DIV} \end{cases}$

$y=\ln x$, $dy=\frac{dx}{x}$ $\quad x\in(e,\infty)\mapsto y\in(1,\infty)$

$\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

---

g) $\int_0^{e^{-1}} x^a |\ln x|^b\,dx$

- nechť $\varepsilon>0$, pak $\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon}\cdot|\ln x|^b = 0 \quad \forall b\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0} x^{-\varepsilon}\cdot|\ln x|^b = +\infty \quad \forall b\in\mathbb{R}$

Integrand $x^a|\ln x|^b$ je spojitý na $(0,e^{-1}]$, problematický bodem je pouze 0

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\Downarrow$

srovnání $\operatorname{tg} x \sim x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow$ KONV.

Ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematický je jen ∞

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1} \searrow 0$ pro $x\to\infty$

$\left|\int_0^M \sin x\right| = |\cos 0 - \cos M| \le 2 \quad \forall M\in(0,\infty)$

$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \cos x - \lim_{x\to 0+} \cos x$ NEEX. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x+1}\,dx$ DIVERGUJE

Ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{srovnání s } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ v } 1$$
$$\text{a s } \frac{1}{\sqrt{1+x}} \text{ v } -1$$

v 1: $\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,dy$ KONV.

subst. $y = 1-x$

v -1: $\lim_{x\to -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}\,dz$ KONV.

subst. $z = 1+x$

Tedy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

---

d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém je v 0.

Pro $0 < x < e^{-1}$ je $\ln x < -1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0 < x < e^{-1} (< 1)$

$$\int_0^1 \cancel{\ln x}\, x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb{R}} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

h) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}$ $\qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2},\pi]$.

$$\left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \in \mathcal{N}(0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi).$$

---

i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}$ ... integrand spojitý na $(0,\frac{1}{2}]$, problém v 0.

• $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ • $\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \overset{VoLSF}{=} 1$

Srovnáme tedy $\lim_{x\to 0+}\dfrac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x\cdot x^2}} = \lim \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3}\cdot\frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$\int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}dx$ KONV. $\iff \int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}dx$ KONV.

$\int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x^3}dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{x}+1\,dx = +\infty$, tedy DIV. $\Rightarrow \int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}$ DIV.

(ln) j) $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}$ ... integrand spojitý na $(1,2]$, problém v 1.

• $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+}\dfrac{\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim_{x\to 1+}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Stačí tedy zjistit $\int_1^2\frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}dx = \int_1^2\frac{x-1}{(\sqrt{x})^p\cdot(\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2\frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}dx$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+}\dfrac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 2 \Rightarrow$ stačí zjistit $\int_1^2(\sqrt{x}-1)^{1-p}dx$

Taylor v 1 z $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = 1+\frac{1}{2}(x-1)+o(x-1)$ $\Rightarrow$ srovnání $\lim_{x\to 1+}\frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^{1-p}} = 1$

$\Rightarrow$ stačí zjistit $\int_1^2 (x-1)^{1-p}dx = \int_0^1 y^{1-p}dy \Rightarrow$ $1-p>-1 \iff p<2 \Rightarrow$ KONV.

subst. $y = x-1$, $dy = dx$, $x\in(1,2)\mapsto y\in(0,1)$ $\qquad 1-p\le -1 \iff p\ge 2 \Rightarrow$ DIV.

• $\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(\frac{\sin x}{\pi-x}\right)^{p} \overset{\text{VLSF}}{=} 1$ • $\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right) = e^{\frac{-\pi^2}{2}}+1$

v π: srovnání s $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^p\,dx \underset{z=\pi-x}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} z^p\,dz$ — $p>-1 \Rightarrow$ KONV. ; $p\le -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $p>3 \Rightarrow$ KONV.
$p\le 3 \Rightarrow$ DIV.

---

n) $\int\limits_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$, problém v 0 a v ∞

v 0: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o_{x\to0}(x^3) \Rightarrow \lim\limits_{x\to0+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

srovnání: $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac{x-\sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}}=\frac{1}{6} \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int\limits_0^1\frac{x^3}{x^p}\,dx$ — $3-p>-1 \Rightarrow$ KONV. ; $3-p\le-1 \Rightarrow$ DIV.

v ∞: $\frac{x-1}{x^p} \le \frac{x-\sin x}{x^p} \le \frac{x+1}{x^p} \Rightarrow$ konvergence je ekvivalentní konvergenci integrálu $\int\limits_1^\infty\frac{x+\alpha}{x^p} = \int\limits_1^\infty \underbrace{x^{1-p}+\alpha x^{-p}}_{=x^{1-p}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}\,dx$ — $1-p<-1 \Rightarrow$ KONV. ; $1-p\ge-1 \Rightarrow$ DIV.

$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}1$

ZÁVĚR: $\int\limits_0^\infty\frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ KONV. pro $2<p<4$
DIV. pro $p\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$

---

10 n) $\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx$

• $p=0 \Rightarrow$ integrand je konstantní 0 $\Rightarrow$ KONV.

• $p>0$: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} px}{px}=1 \Rightarrow$ srovnání s $\int\limits_0^1\frac{px}{x^n}\,dx \Rightarrow 1-n>-1 \Rightarrow$ KONV ; $1-n\le-1 \Rightarrow$ DIV.

$n\in\mathbb{N}$, tedy pouze pro $n=1$ je šance na konvergenci

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ srovnání s $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^n} \Rightarrow -n<-1 \Rightarrow$ KONV ; $-n\ge-1 \Rightarrow$ DIV.

Tedy DIV i pro $n=1$.

• $p<0$: $\operatorname{arctg} px = -\operatorname{arctg}|p|x$, tedy $\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx = -\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}|p|x}{x^n}\,dx$, kterýžto integrál jsme právě vyšetřili.

ZÁVĚR: $p=0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ konv.
$p\neq0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ div.

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\Downarrow$

srovnání $\operatorname{tg} x \sim x$

$$\lim_{x\to0+} \frac{\operatorname{tg}x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to0+}\frac{\operatorname{tg}x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg}x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1\frac{1}{\sqrt x} = 2<\infty \Rightarrow$ KONV.

Ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty\frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematické je jen ∞

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1}\searrow 0$ pro $x\to\infty$

$\left|\int_0^M \sin x\right| = |\cos 0 - \cos M| \le 2 \quad \forall M\in(0,\infty)$

$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty}\cos x - \lim_{x\to0+}\cos x$ NEEX. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x+1}\,dx$ DIVERGUJE

1p Ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{srovnání s } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ v } 1$$

a s $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ v -1

v 1: $\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{VOAL}{\underset{VOLSF}{=}} \frac12 \quad\Rightarrow \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac12}\,dy$ KONV.

subst. $y=1-x$

v -1: $\lim_{x\to-1+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{VOAL}{\underset{VOLSF}{=}} \frac12 \quad\Rightarrow \int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 z^{-\frac12}\,dz$ KONV.

subst. $z=1+x$

Tedy $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

---

d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém je v 0.

Pro $0<x<e^{-1}$ je $\ln x<-1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0<x<e^{-1}(<1)$

$$\int_0^1 \cancel{\operatorname{tg}x}\, x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb R} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

h) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}$ $\quad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2},\pi]$.

$$\left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt x}\right| \le \frac{1}{\sqrt x} \in \mathcal{N}(0,\pi) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt x}\right| \in \mathcal{N}(0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt x}\in \mathcal{N}(0,\pi).$$

---

i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}$ ... integrand spojitý na $(0,\frac12]$, problém v 0.

• $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\quad$ • $\lim_{y\to0}\frac{\arcsin y}{y}=1 \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \overset{VoLSF}{=} 1$

Srovnáme tedy $\lim_{x\to0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x\cdot x^2}} = \lim \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3}\cdot\frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$\int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}dx$ KONV.

$\int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x^3}dx = \int_0^{1/2}\frac1x+1\,dx=+\infty$, tedy DIV. $\Rightarrow \int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}$ DIV.

---

j) $\int_1^2\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt x)^p}$ ... integrand spojitý na $(1,2]$, problém v 1.

• $\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y}=1 \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}=1$

Srovnání: $\lim_{x\to1+}\frac{\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt x)^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt x)^p}} = \lim_{x\to1+}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}=1$

Stačí tedy vyšetřit $\int_1^2\frac{x-1}{(x-\sqrt x)^p}dx = \int_1^2\frac{x-1}{(\sqrt x)^p\cdot(\sqrt x-1)^p} = \int_1^2\frac{(\sqrt x+1)\cdot(\sqrt x-1)}{(\sqrt x)^p\,(\sqrt x-1)^p}dx$

Srovnání: $\lim_{x\to1+}\frac{\frac{(\sqrt x+1)(\sqrt x-1)}{(\sqrt x)^p(\sqrt x-1)^p}}{(\sqrt x-1)^{1-p}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 2 \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_1^2(\sqrt x-1)^{1-p}dx$

Taylor v 1 z $\sqrt x$: $\quad \sqrt x = 1+\frac12(x-1)+o(x-1) \quad \Rightarrow$ srovnání $\lim_{x\to1+}\frac{(\sqrt x-1)^{1-p}}{(\frac12(x-1))^{1-p}}=1$

$\Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_1^2 (x-1)^{1-p}dx = \int_0^1 y^{1-p}dy \Rightarrow 1-p>-1 \Leftrightarrow p<2 \Rightarrow$ KONV.

subst. $y=x-1$, $dy=dx$, $x\in(1,2)\mapsto y\in(0,1)$ $\Rightarrow 1-p\le-1\Leftrightarrow p\ge2\Rightarrow$ DIV.

Příklad 4 : Určete, pro která $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, konverguje následující Newtonův integrál:

2a

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x\,.$$

(15 bodů)

Řešení : Pišme

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\, \mathrm{d}x =: I_0 + I_\infty\,.$$

(1) Protože $f(x) := \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x) \in \mathcal{C}((0,1])$, závisí konvergence integrálu I_0 na chování funkce f „u nuly“. Máme $f(x) > 0$ pro $x \in (0,1]$, a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)}{\frac{1}{x^{a-3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2x \cdot \frac{x^{a-3}}{x^a} = 2$$

je vlastní a nenulová. Proto podle limitního srovnávacího kritéria pro Newtonův integrál konverguje integrál I_0 právě tehdy, když konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{a-3}}\, \mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál však konverguje právě tehdy, když $a - 3 < 1$ neboli $a < 4$, jak lze ověřit například jeho přímým výpočtem.

(2) Je $f \in \mathcal{C}([1,+\infty))$, ale f „střídá znaménko blízko nekonečna“. Protože funkce $\sin 2x$ má na intervalu $(1,+\infty)$ omezenou primitivní funkci $(-\frac{1}{2}\cos 2x)$, a $\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \in \mathcal{C}([1,+\infty))$, bude podle Dirichletova kritéria pro konvergenci Newtonova integrálu stačit, když ukážeme (přesněji, když najdeme taková $a \in \mathbf{R}, a > 0$, pro která platí):

(i) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} = 0\,,$$

(ii) $\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}$ je monotónní na nějakém okolí bodu nekonečno.

Ad (i): pro všechna $x > 0$ platí

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}\right| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^a} \to 0 \qquad \text{když } x \to +\infty\,, \quad \text{pro všechna } a \in \mathbf{R},\ a > 0,$$

odkud plyne (i) pro všechna $a \in \mathbf{R}, a > 0$.

Ad (ii): derivace funkce $g(x) := \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}$ je

$$g'(x) = \frac{x^4}{(1+x^4)\,x^{a+1}} \left[\frac{2}{x^2} - a \cdot \operatorname{arctg} x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)\right], \quad x > 0\,.$$

Výraz v hranaté závorce má pro $x \to +\infty$ limitu $-a\frac{\pi}{2}$, který je pro $a > 0$ záporný. Existuje tedy $x_0 \in \mathbf{R}$ takové, že $g'(x) < 0$ pro všechna $x \in (x_0, +\infty)$. Odtud plyne (ii).

Závěr: daný integrál konverguje pro $a \in (0,4)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- konvergence na okolí nuly .... 5 bodů
- ověření monotonie .... 5 bodů
- ověření omezenosti primitivní funkce .... 2 body
- aplikace kritéria a závěr .... 3 bo dy

Poznámka: bylo možno také použít rovnou Dirichletovo kritérium:

Posloupnost $\{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty a derivace funkce $\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}{2x+\frac{100}{x}}$ je od jistého $x_0 \in \mathbf{R}$ záporná, tedy tato funkce klesá na okolí nekonečna, a snadno se také ukáže, že má v nekonečnu nulovou limitu. V tomto případě je ovšem výpočet derivace výše uvedené funkce a zjištění jejího chování v blízkosti nekonečna poněkud obtížnější, i když proveditelné.

Příklad 3 : Integrovaná funkce je definovaná na $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$, primitivní funkci tedy hledáme na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

Při použití substituce $t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ dostaneme postupně (všimněte si, že pro žádné $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ nemůže být t^2 být rovno 1):

$$x=\frac{t^2-2}{1-t^2}, \qquad \mathrm{d}x=-\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$(x+1)(4x+5)(2x+3)=-\frac{(t^2+3)(t^2+1)}{(1-t^2)^3}, \qquad (3x+4)=-\frac{t^2+2}{1-t^2},$$

a tedy

$$\int\frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky dá

$$-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t-\int\frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t\stackrel{c}{=}-\operatorname{arctg}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\,,\quad t\in\mathbf{R}\,,$$

a tedy

$$\int\frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,\mathrm{d}x\stackrel{c}{=}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)$$

na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

2b

Příklad 4 : Označíme

$$I:=\int_0^{\infty}(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$I_1:=\int_0^{1}(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$I_\infty:=\int_1^{\infty}(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Pro vyšetření chování integrálu I_0 použijeme

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}}{x^{a+1}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^a\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2x+1}=1\,,$$

proto I_0 konverguje (podle limitního srovnávacího kritéria) právě když konverguje $\int_0^1 x^{a+1}\,\mathrm{d}x$, což je právě tehdy, když $a>-2$.

Pro vyšetření chování integrálu I_∞ použijeme následující úvahu: protože $(\operatorname{arctg} x)^a$ je na $(1,+\infty)$ monotónní a omezená funkce pro libovolné $a \in \mathbf{R}$ (ukažte to podrobně), bude podle Abelova kritéria stačit, když bude konvergovat integrál

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál však konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\sin x$ má na $(1,+\infty)$ omezenou primitivní funkci a $\frac{1}{2x+1}$ jde monotónně k nule pro $x \to +\infty$.

Závěr: I konverguje, právě když $a > -2$.

- Součet konvergentních řad (1) a (2) je konvergentní řada, tedy řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{konverguje.} \tag{3}$$
- Protože posloupnost $\cos \frac{1}{n}$ je omezená a rostoucí (odůvodněte podrobně!), konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (3)) i řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} \cdot \cos \frac{1}{n}.$$

Závěr: řada konverguje.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Potom máme
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Tato substituce převede uvažovaný integrál na
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\,\mathrm{d}t.$$
Integrand rozložíme na parciální zlomky
$$\frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)} = \frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1}.$$
Standardní integrací racionálních zlomků pak dostaneme
$$\int \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(t^2+t+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t \qquad \text{na } \mathbf{R}.$$
Pak máme
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+2}{t^2+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) + \operatorname{arctg} t \right]_{-\infty}^{\infty}$$
$$= \pi \left(1 + \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$$

Poznámka: Pozor! Rovnost
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+1}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
neplatí, neboť integrály na pravé straně neexistují.

2c

Příklad 4 : Integrand $f(x) = \operatorname{tg}^{\alpha} x \sin^{\beta} x$ je spojitý a kladný na intervalu $(0, \pi/2)$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Integrál tedy $\int_0^{\pi/2} f$ tedy konverguje, právě když konvergují integrály $\int_0^{\pi/4} f$ a $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$.

- Integrál $\int_0^{\pi/4} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = x^{\alpha+\beta}$ definovanou na $(0, \pi/4]$. Platí $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^{\pi/4} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

• Integrál $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = (\pi/2 - x)^{-\alpha}$ definovanou na $[\pi/4, \pi/2)$. Platí $\lim_{x \to \pi/2-} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\frac{\pi}{2} - x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $-\alpha > -1$.

Závěr: Integrál $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x \sin^\beta x\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$ a $\alpha < 1$.

---

tedy i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)n=0$$

podle Heineho věty.

- Označíme $f(x) := 1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, potom

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}-(\log(x+1)-\log x)\,.$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x\in(0,\infty)$ existuje $\xi_x\in(0,1)$ takové, že

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+\xi_x}<0 \qquad \text{pro všechna } x>0.$$

Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0,\infty)$, a proto je i posloupnost $a_n=f(n)$ klesající.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka: Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí

$$f''(x)=\frac{1}{x(1+x)^2}, \qquad x\in(0,\infty).$$

Funkce f' je tedy rostoucí na $(0,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. Odtud plyne, že f' je záporná na $(0,\infty)$, a tedy f je na $(0,\infty)$ klesající.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\sqrt{2x+1}=t$, tj. $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$. Dostaneme

$$I:=\int_0^1\frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}=\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\,.$$

Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$. Celkově dostaneme

$$\int\left(\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\right)\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}, \qquad t\in\mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I=\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

2d

Příklad 4 : Označíme

$$f(x)=\frac{\log^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$

pro $x\in(0,\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0,\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x)=\frac{x^\alpha x^\beta}{x^2}=x^{\alpha+\beta-2}$. Funkce g je na intervalu $(0,1]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 0+}f(x)/g(x)=\pi^{-3}\in(0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha+\beta>1$.

Bod π. Položme $g(x)=(\pi-x)^{-3}(\pi-x)^{\beta}=(\pi-x)^{-3+\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1,\pi)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to\pi-} f(x)/g(x)\in(0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_1^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\pi g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\beta>2$.

Závěr: $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(\alpha+\beta>1\ \&\ \beta>2)$.

$a_n := f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, je tedy rostoucí a snadno se spočte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená (monotonii lze opět dostat například zderivováním příslušné funkce, omezenost plyne z toho, že posloupnost má vlastní limitu – jakou?). Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n + 1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{2}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n + 1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n\right| \leq \frac{\pi}{2}\left|\log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{e^n + 1}{e^n - 1}\right) \tag{3}$$

a dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n-1}} \cdot \frac{\frac{2}{e^n-1}}{\frac{2}{e^n}} = 1 \tag{4}$$

(spočtěte pečlivě). Použijte dále skutečnost, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ konverguje (například podle podílového kritéria). Výsledek pak dá limitní srovnávací a srovnávací kritérium s použitím (3) a (4).

Příklad 3 : Použijeme substituci $e^x = y$, $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$. Dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2 (e^x + 1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(y + 2)^2 (y + 1)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2} = \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{4}{y+2} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{4}{y+1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{4}{y+2} + 4\log(y+2) - \frac{1}{y+1} - 4\log(y+1)\right]_0^{\infty} \\ &= \left[-\frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} + 4\log\left(\frac{y+2}{y+1}\right)\right]_0^{\infty} = 3 - 4\log 2. \end{aligned}$$

2e **Příklad 4 :** Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha} \frac{\sin^{\beta}(\pi x)}{(1 - x)^{\alpha}}$$

pro $x \in (0, 1)$. Funkce f je na intervalu $(0, 1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = x^{3\alpha}(\pi x)^{\beta}$. Funkce g je na intervalu $(0, 1/2]$ kladná, spojitá a nepříliš těžký výpočet (například s využitím Taylorova polynomu pro funkci arcsin z příkladu 1) ukazuje $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^{1/2} g(x)\,\mathrm{d}x$ přičemž tento integrál konverguje, právě když $3\alpha + \beta > -1$.

Bod 1. Položme $g(x) = (1-x)^{-\alpha} \cdot (1-x)^{\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1/2, 1)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 1-} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_{1/2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_{1/2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $-\alpha + \beta > -1$, tj. $\alpha - \beta < 1$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(3\alpha + \beta > -1 \ \& \ \alpha - \beta < 1)$.

Příklad 3 : Platí $5\cos^2 x + 4\sin x\cos x + \sin^2 x = (2\cos x + \sin x)^2 + \cos^2 x$, a protože funkce sin a cos nejsou v žádném reálném bodě současně rovny nule, je jmenovatel integrandu kladný pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Integrand je tedy spojitý na $\mathbf{R}$ a má (spojitou) primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$.

Použijeme substituci $\operatorname{tg} x = y$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$, kde uvažujeme $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in \mathbf{R}$. Po substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+4y+5} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+2)^2+1} \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(2+y), \qquad y \in \mathbf{R}\,.$$

Funkce

$$F_0(x) := \operatorname{arctg}(2+\operatorname{tg} x)$$

je tedy primitivní k funkci $f(x) := \frac{1}{5\cos^2 x + 4\sin x\cos x}$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Přímým výpočtem lze ověřit, že F_0 je primitivní k f i na všech intervalech tvaru $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Pro zkonstruování primitivní funkce k f na celém $\mathbf{R}$ použijeme techniku „lepení“. Spočteme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F_0(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} F_0(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

v každém z bodů $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ je tedy potřeba „odstranit skok“ velikosti π. Proto je funkce

$$F(x) := \begin{cases} F_0(x) + k\pi\,, & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)\,,\ \ k \in \mathbf{Z}\,, \\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,, & x = \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ \ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

primitivní k funkci f na celém $\mathbf{R}$. Všechny funkce, primitivní k f na $\mathbf{R}$, mají pak tvar $F(x)+c$, $c \in \mathbf{R}$.

2b

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = \operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x}) \cdot \sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)$$

pro $x \in (0, 2\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0, 2\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0**.** Pišme

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x})}{x^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\beta} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^\beta. \tag{2}$$

Položíme-li tedy $g(x) = x^{\frac{\alpha}{2}+\beta}$, dostaneme z (2) standardním výpočtem, že $\lim_{x\to0+} f(x)/g(x) \in (0,\infty)$. Funkce g je na intervalu $(0,\pi]$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x$. Tento integrál však konverguje, právě když $\frac{\alpha}{2}+\beta > -1$.

Bod 2π**.** Pišme

$$f(x) = \operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - \frac{x}{2}}\right)^\beta \cdot \left(\pi - \frac{x}{2}\right)^\beta. \tag{3}$$

Položíme-li tedy $g(x) = \left(\pi - \frac{x}{2}\right)^\beta$, dostaneme z (3) standardním výpočtem, že $\lim_{x\to2\pi-} f(x)/g(x) \in (0,\infty)$. Funkce g je na intervalu $[\pi, 2\pi)$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_\pi^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_\pi^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\beta > -1$.

Závěr: $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(\frac{\alpha}{2}+\beta > -1\ \&\ \beta > -1)$.

28

Příklad 4 :

Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha} \sin^{\beta}(\pi x) \cos^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = x^{3\alpha}x^{\beta} = x^{3\alpha+\beta}$. Funkce g je na intervalu $(0,1/2]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = (\frac{1}{6})^{\alpha}\pi^{\beta} \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^{1/2} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $3\alpha + \beta > -1$.

Bod 1. Položme $g(x) = (1-x)^{\beta}(1-x)^{\alpha} = (1-x)^{\alpha+\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1/2,1)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 1-} f(x)/g(x) = (\pi/2-1)^{\alpha}\pi^{\beta}(\pi/2)^{\alpha} \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_{1/2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_{1/2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(3\alpha + \beta > -1 \;\&\; \alpha + \beta > -1)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- bod 0 .... 7 bodů
- bod 1 .... 7 bodů
- závěr .... 1 bod

---

3) jde vlastně o LSK s $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ na $[a, \infty)$

tedy: • $A \in (0, \infty)$: $\int_a^\infty f$ K $\iff \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ K $\iff \alpha > 1$

• $A = 0$ $\quad \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ K $\Rightarrow \int_a^\infty f$ K

$\alpha > 1$

• $A = \infty$ $\quad \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ D $\Rightarrow \int_a^\infty f$ D

$\alpha \leq 1$

(4) Jde o LSK s $g(x) = \frac{1}{(x-b)^\alpha}$ pak

• $A \in (0, \infty)$: $\int_a^b f(x)$ K $\iff \int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}$ K $\iff \alpha < 1$

• $A = 0$ $\quad \int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}$ K $\Rightarrow \int_a^b f$ K

$\alpha < 1$

• $A = \infty$ $\quad \int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}$ D $\Rightarrow \int_a^b f$ D

$\alpha \geq 1$