$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} - C(x)P\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} + PC(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} = Q,$$

po úpravě dostaneme

$$C'(x) = Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}. \tag{22}$$

To je diferenciální rovnice pro funkci $C(x)$, jejíž řešení je možno napsat ve tvaru

$$C(x) = \int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + K, \tag{23}$$

kde K je libovolná konstanta. Dosadíme-li tuto funkci do rovnice (20), obdržíme

$$y = \mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}\left(K + \int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right), \tag{24}$$

což je obecný integrál dané diferenciální rovnice.

1a

Příklad 5 – variace konstant – 1

Řešte rovnici $y' + y = \mathrm{e}^x$ metodou variace konstant.

Řešení

1. Nejprve řešíme příslušnou homogenní rovnici $y'+y = 0$ metodou separace proměnných.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x,$$
$$y = C\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Předpokládáme $C = C(x)$, potom $y = C(x)\mathrm{e}^{-x}$, $y' = C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x}$. Po dosazení do původní nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x} + C(x)\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^x, \\ C'(x) &= \mathrm{e}^{2x}, \\ C(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + K, \end{aligned}$$

kde K je libovolná konstanta.

Pak $y = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + K\right)\mathrm{e}^{-x}$, neboli

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + K\mathrm{e}^{-x}.$$

(1b) $xy' - y = x^2$

- pro $x \in (-\infty, 0)$, $(0, \infty)$:

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

- $$y' = \frac{y}{x} \qquad\qquad y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$|y| = e^c |x| \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y = kx \qquad k \in \mathbb{R}$$

- $$y = k(x) \cdot x$$

$$k'x + k - \frac{kx}{x} = x$$

$$k' = 1$$

$$\underline{k = x + c}$$

- $$y = (x+c)\,x \qquad x \in (-\infty, 0),\ (0, \infty)$$
$$c \in \mathbb{R}$$

- lepení

$$\lim_{x \to 0^\pm} = 0$$

odhad:
$$y = \begin{cases} x(x+c_1) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x(x+c_2) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} y' = \lim_{x \to 0+} 2x + c_2 = c_2$$

lépe:
$$y = \begin{cases} x(x+c_1) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x(x+c_1) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} y' = \lim_{x \to 0-} 2x + c_1 = c_1$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_2$$

Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$u = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K$$

$$y = \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Můžeme si všimnout, že v obou postupech jsou počítané integrály stejné.

5.1 Řešené úlohy

(1c)

Příklad 5.1 $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

Řešení DR

zkrácená LDR

$$y' - xy = 0$$

to je DR se separovanými proměnnými

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\tilde{y} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

to je obecné řešení zkrácené LDR, nyní nalezneme obecné řešení úplné LDR

$$y = C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

derivace bude:

$$y' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + xC(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

(1c)

dosadíme do zadání

$$\left[C'(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} + xC(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right] - xC(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$$

$$C'(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2+2x}{2}}$$

$$C'(x) = e^{\frac{2x}{2}}$$

$$C'(x) = e^{x}$$

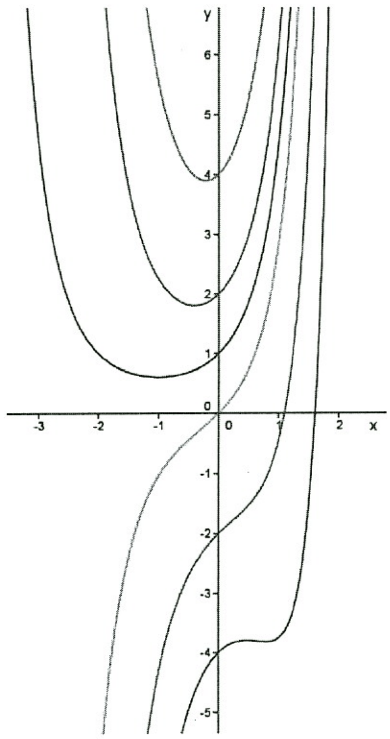
$$C(x) = \int e^{x}dx = e^{x} + K$$

provedeme dosazení $C(x)$ do $y = C(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ a dostaneme

$$y = (e^{x} + K)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

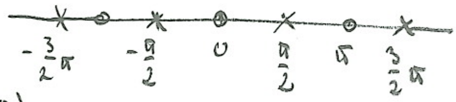
kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -5, -3, -1, 0, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(1d) $y' \tan x - y = 1$



$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; dále řešíme pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ a $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $+ k\pi$

• $y' - y \cdot \cot x = \cot x$

$$y' = y \cdot \cot x \qquad y \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cot x \, dx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = |\sin x| \cdot e^c$$

$$\underline{\underline{y = k \cdot \sin x}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

• $k' \sin x + k \cos x - k \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$k' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$k = \frac{-1}{\sin x} + d \qquad d \in \mathbb{R}$$

pak $y = \left(\frac{-1}{\sin x} + d\right) \sin x = -1 + d \cdot \sin x$

lepení v $0 + k\pi$

slepeno spojitě.

$$y = \begin{cases} -1 + d_1 \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -1 & x = 0 \\ -1 + d_2 \sin x & x \in (\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

Dce: $\lim_{x \to 0-} y' = \lim_{x \to 0-} -1 + d_1 \cos x = -1 + d_1$

$\lim_{x \to 0+} y' = \lim -1 + d_2 \cos x = -1 + d_2$

$\leadsto d_1 = d_2$

znovu:

$$y = \begin{cases} -1 + d_2 \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -1 & x = 0 \\ -1 + d_2 \sin x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

toto je obecné řešení zkrácené LDR, nyní nalezneme obecné řešení úplné LDR

$$y = C(x) \cdot \sin x$$

derivace bude

$$y' = C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x$$

dosadíme do zadání

$$[C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x] \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - C(x) \sin x = 1$$

$$C'(x) \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 1$$

$$C(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + K$$

provedeme dosazení $C(x)$ do $y = C(x) \cdot \sin x$ a získáme

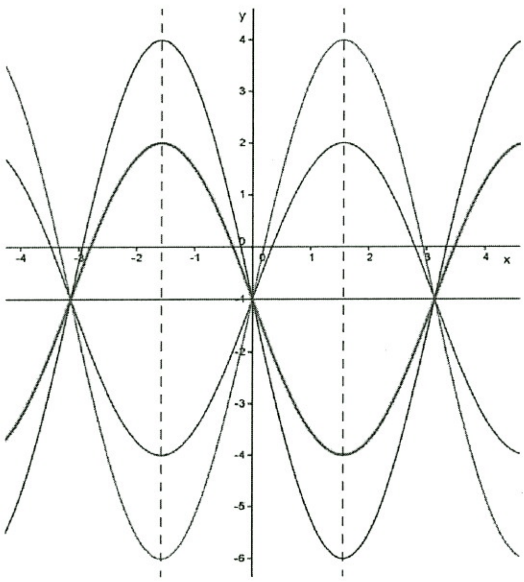
$$y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K\right) \cdot \sin x$$

$$y = K \cdot \sin x - 1$$

kde $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -5, -3, 0, 3, 5

obr (1d)



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

kde $u(t,c)$ je obecný tvar řešení příslušné homogenní rovnice a $w(t)$ je jedno partikulární řešení rovnice nehomogenní. Připomeňme, že $u(t,c) = c\exp(\int h(t)\mathrm{d}t)$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice můžeme získat metodou *variace konstanty*. Uvedeme stručně princip této metody, která se používá i při řešení ostatních lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav.

Metoda variace konstanty je založena na tom, že existuje řešení nehomogenní rovnice, které má obdobné vyjádření jako má obecný tvar řešení homogenní rovnice $u(t,c)$, kde je konstanta c nahrazena vhodně zvolenou funkcí $c(t)$. Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$w(t) = c(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t}, \ t \in \mathcal{I}. \tag{4.3}$$

Dosazením do nehomogenní rovnice dostaneme rovnici

$$c'(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} + c(t)h(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} = h(t)c(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} + q(t)$$

a odtud získáme podmínku pro neznámou funkci $c(t)$ ve tvaru

$$c'(t) = q(t)\mathrm{e}^{-\int h(t)\mathrm{d}t}.$$

Je tedy

$$c(t) = \int q(t)\mathrm{e}^{-\int h(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

a tudíž

$$x(t) = x(t,c) = c\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t}\left(\int q(t)\mathrm{e}^{-\int h(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right), \ t \in \mathcal{I}. \tag{4.4}$$

V neurčitých integrálech ve vzorci volíme jednu z primitivních fukcí. Obecnost řešení je zohledněna v konstantě c.

Řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = h(t)x + q(t), \ x(\tau) = \xi$$

můžeme zapsat obdobným vzorcem. Za primitivní funkce volíme funkce horní meze s počáteční mezí τ. Dostaneme vzorec pro řešení ve tvaru

$$x(t) = x(t;\tau,\xi) = \xi\mathrm{e}^{\int_\tau^t h(s)\mathrm{d}s} + \int_\tau^t \mathrm{e}^{\int_s^t h(r)\mathrm{d}r} q(s)\mathrm{d}s, \ t \in \mathcal{I}. \tag{4.5}$$

První sčítanec je řešením homogenní rovnice s počáteční podmínkou $x(\tau) = \xi$ a druhý je řešením nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou.

Řešené úlohy k odstavci 4.

1e)

1. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -\frac{3}{t}x + \frac{2}{t^3}, \quad x(1) = 3.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí tvaru (4.1) a její řešení má tvar (4.2), kde funkci $u(t)$ určíme postupem z odst. 3, (vzorec (3.2)) a funkci $w(t)$ metodou variace konstanty z odst. 4, (vzorec (4.3)).

Příslušná homogenní rovnice je

$$x' = -\frac{3}{t}x, \ t \in (0,\infty) \text{ nebo } t \in (-\infty, 0),$$

(1e)

tedy pro její řešení $u(t)$ platí:

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t = -\int \frac{3}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|u(t)| = -3\ln|t| + \ln c^*,$$

tedy

$$u(t,c) = \frac{c}{t^3},\ t \in (-\infty,0) \text{ nebo } t \in (0,\infty).$$

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat podle (4.3) ve tvaru

$$w(t) = \frac{c(t)}{t^3},\ t \in (-\infty,0) \text{ nebo } t \in (0,\infty).$$

Po dosazení za $w(t)$ a $w'(t)$ do řešené rovnice dostaneme:

$$w(t) = \frac{c(t)}{t^3},\ w'(t) = \frac{c'(t)}{t^3} - 3\frac{c(t)}{t^4} \Rightarrow$$

$$\frac{c'(t)}{t^3} - 3\frac{c(t)}{t^4} = -\frac{3}{t}\frac{c(t)}{t^3} + \frac{2}{t^3} \Rightarrow c'(t) = 2 \Rightarrow c(t) = 2t,$$

tedy

$$w(t) = \frac{2}{t^2},\ t \in (-\infty,0) \text{ nebo } t \in (0,\infty).$$

Dosazením do vzorce (4.2) dostaneme vzorec pro obecné řešení

$$\underline{x(t,c) = \frac{c}{t^3} + \frac{2}{t^2},\ t \in (-\infty,0) \text{ nebo } t \in (0,\infty).}$$

Pro řešení příslušné Cauchyovy úlohy dostaneme podmínku:

$$t = 1 \text{ a } x = 3 \Rightarrow 3 = c + 2 \Rightarrow c = 1.$$

Je tedy

$$\underline{x(t) = x(t;1,3) = \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t^2},\ t \in (0,\infty).}$$

2. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = x\mathrm{tg}\,t + \frac{1}{\cos t},\quad x(0) = 2.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí tvaru (4.1) a její řešení má tvar (4.2), kde funkci $u(t)$ určíme postupem z odst. 3, (vzorec (3.2)) a funkci $w(t)$ metodou variace konstanty z odst. 4, (vzorec (4.3)). Funkce $\mathrm{tg}\,t$ a $\frac{1}{\cos t}$ jsou spojité v intervalech $((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, k je celé číslo, a v nich bude mít rovnice řešení.

Příslušná homogenní rovnice je

$$x' = x\mathrm{tg}\,t,$$

pro její řešení $u(t)$ platí:

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t = \int \mathrm{tg}\,t\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|u(t)| = -\ln|\cos t| + \ln c^* = \ln\frac{c^*}{|\cos t|}$$

tedy

$$u(t,c) = \frac{c}{\cos t},\ t \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}),\ k \text{ je celé číslo}.$$

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat podle (4.3) ve tvaru

$$w(t) = \frac{c(t)}{\cos t}.$$

Po dosazení za $w(t)$ a $w'(t)$ do řešené rovnice dostaneme:

$$w(t) = \frac{c(t)}{\cos t},\ w'(t) = \frac{c'(t)}{\cos t} + \frac{c(t)\sin t}{\cos^2 t},$$

$$\frac{c'(t)}{\cos t} + \frac{c(t)\sin t}{\cos^2 t} = \frac{c(t)}{\cos t}\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t} \Rightarrow c'(t) = 1$$

tedy

$$c(t) = t \Rightarrow w(t) = \frac{t}{\cos t},\ t \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}),\ k \text{ je celé číslo.}$$

Dosazením do vzorce (4.2) dostaneme vzorec pro obecné řešení

$$\underline{x(t,c) = \frac{c}{\cos t} + \frac{t}{\cos t}},\ t \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}),\ k \text{ je celé číslo.}$$

Pro řešení příslušné Cauchyovy úlohy dostaneme z počáteční podmínky

$$t = 0,\ x = 2 \Rightarrow 2 = c$$

je tedy

$$\underline{x(t) = x(t;0,1) = \frac{2+t}{\cos t},\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).}$$

(1f)

3. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = x + \mathrm{e}^t, \quad x(2) = -3.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí tvaru (4.1) a její řešení má tvar (4.2), kde funkci $u(t)$ určíme postupem z odst. 3, (vzorec (3.2)) a funkci $w(t)$ metodou variace konstanty z odst. 4, (vzorec (4.3)). Rovnice je ovšem také lineární diferenciální rovnicí s konstantním koeficientem tvaru (5.1) se speciální pravou stranou tvaru (5.4). Řešení homogenní rovnice je dáno vzorcem (5.2) a funkci $w(t)$ lze najít odhadem podle (5.7). Zde uvedeme obecný postup řešení a můžete jej porovnat s úlohami v odstavci 5.

Příslušná homogenní rovnice je

$$x' = x,\ t \in \mathrm{R},$$

pro její řešení $u(t)$ platí:

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t \Rightarrow \ \ln|u(t)| = t + \ln c^*,$$

tedy

$$u(t,c) = c\mathrm{e}^t,\ t \in \mathrm{R}.$$

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat podle (4.3) ve tvaru

$$w(t) = c(t)\mathrm{e}^t,\ t \in \mathrm{R}.$$

Po dosazení za $w(t)$ a $w'(t)$ do řešené rovnice dostaneme:

$$w(t) = c(t)\mathrm{e}^t,\ w'(t) = c'(t)\mathrm{e}^t + c(t)\mathrm{e}^t,$$

(1f)

$$c'(t)e^t + c(t)e^t = c(t)e^t + e^t \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c(t) = t$$

tedy

$$w(t) = te^t \in \mathrm{R}.$$

Dosazením do vzorce (4.2) dostaneme vzorec pro obecné řešení

$$\underline{x(t,c) = ce^t + te^t, \ t \in \mathrm{R}.}$$

Pro řešení příslušné Cauchyovy úlohy dostaneme z počáteční podmínky

$$t = 2, \ x = -3 \Rightarrow -3 = ce^2 + 2e^2 \Rightarrow c = -3e^{-2} - 2$$

je tedy

$$\underline{x(t) = x(t; 2, -3) = (t - 3e^{-2} - 2)e^t, \ t \in \mathrm{R}.}$$

Neřešené úlohy k odstavci 4.

1. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -\frac{4t}{t^2+1}x + \frac{1}{t^2+1}, \quad x(0) = -3.$$

$$[x(t,c) = \tfrac{c}{(t^2+1)^2} + \tfrac{t^3+t}{3(t^2+1)^2}, \ x(t) = x(t; 0, -3) = \tfrac{-3}{(t^2+1)^2} + \tfrac{t^3+t}{3(t^2+1)^2}, \ t \in \mathrm{R}]$$

2. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -2tx + 2te^{-t^2}, \quad x(1) = 4.$$

$$[x(t,c) = ce^{-t^2} + t^2e^{-t^2}, \ x(t) = x(t; 1, 4) = (4e - 1 + t^2)e^{-t^2}, \ t \in \mathrm{R}]$$

3. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = \frac{2}{t}x + \frac{t-1}{t}, \quad x(1) = 5.$$

$$[x(t,c) = ct^2 + \tfrac{1}{2} - t, \ t \in (0, \infty) \text{ nebo } t \in (-\infty, 0), \ x(t) = x(t; 1, 5) = \tfrac{11}{2}t^2 + \tfrac{1}{2} - t, \ t \in (0, \infty)]$$

4. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -t^2x + t^2, \quad x(0) = 1.$$

$$[x(t,c) = 1 + ce^{-\frac{1}{3}t^3}, \ x(t) = x(t; 0, 1) = 1, \ t \in (-\infty, \infty)]$$

5. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = \frac{1}{t}x + \frac{3}{t}, \quad x(1) = 2.$$

$$[x(t,c) = \tfrac{c}{t} + 3, \ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } (0, \infty), \ x(t) = x(t; 1, 2) = 3 - \tfrac{1}{t}, \ t \in (0, \infty)]$$

$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln C$

Řešení upravíme využitím pravidla o skládání vzájemně inverzních funkcí a pravidel pro počítání s logaritmy:

$\ln|y| = \ln e^{-\int P(x)\,dx} + \ln C$

$\ln|y| = \ln Ce^{-\int P(x)\,dx}$

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \qquad (2)$$

což je předpokládaný tvar řešení. Je to část řešení, která odpovídá zkrácené rovnici.

Je zřejmé, že výjimečné řešení lineární diferenciální rovnice nemá, protože řešení $y = 0$ (vyplývající z podmínky $y \neq 0$) dostaneme dosazením za $C = 0$ do vztahu (2).

Pravou stranu $Q(x)$ do řešení zabudujeme následujícím postupem.

II. Druhý krok se nazývá variace (změna) konstanty. V obecném řešení (2) bude místo konstanty C funkce proměnné x: $C = C(x)$

Dosadíme za ni do (2): $y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

Derivujeme součin: $y' = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}.\big(-P(x)\big)$

Za y a y' dosadíme do zadání:

$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}\big(-P(x)\big) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$

Následuje kontrolní krok: sčítance s $C(x)$ se vzájemně musí vyrušit, zůstává pouze sčítanec s derivací $C'(x)$.

$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$, upravíme $C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$

a odtud vypočítáme integrační konstantu $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + K$.

III. Obecné řešení zadané lineární diferenciální rovnice získáme dosazením vypočítané konstanty do předpokládaného tvaru řešení (2):

$\boxed{y = (\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + K)e^{-\int P(x)\,dx}}$.

(1g) *Příklad 7.10:* Vyřešte diferenciální rovnici $y' - \frac{5y}{x} = x^2, \quad x \neq 0$.

Řešení: Budeme dodržovat výše uvedený postup I. – III. uvedený v 7.2.4:

I. Vyřešíme příslušnou zkrácenou rovnici $y' - \frac{5y}{x} = 0$,

která je vždy separovatelná. Vyřešíme ji proto postupem uvedeným v 7.2.2.

$\frac{dy}{dx} - \frac{5y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5y}{x} \quad |dx$

$dy = \frac{5y}{x}dx \quad |\frac{1}{y}, \quad y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = \frac{5}{x}dx$

(1g)

$$\int \frac{dy}{y} = 5\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = 5\ln|x| + \ln C$$

Řešení upravíme využitím pravidel pro počítání s logaritmy:

$$\ln|y| = \ln\left|x^5\right| + \ln C$$

$$\ln|y| = \ln C\left|x^5\right|$$

$$y = Cx^5, \tag{3}$$

což je předpokládaný tvar řešení. Je to část řešení, která odpovídá levé straně rovnice. Je zřejmé, že výjimečné řešení lineární diferenciální rovnice nemá, protože řešení $y = 0$ (vyplývající z podmínky $y \neq 0$) dostaneme dosazením za $C = 0$ do vztahu (3).

Pravou stranu $Q(x) = x^2$ do řešení zabudujeme následujícím postupem.

II. Druhý krok se nazývá variace (změna) konstanty. Obecné řešení (3) bude mít místo konstanty C funkci proměnné x: $C = C(x)$.

Dosadíme za ni do (3): $y = C(x).x^5$,

derivujeme součin: $y' = C'(x)x^5 + C(x).5x^4$.

Za y a y' dosadíme do zadání $C'(x)x^5 + C(x).5x^4 - \dfrac{5C(x)x^5}{x} = x^2$

Následuje kontrolní krok: sčítance s $C(x)$ se vzájemně musí odečíst, zůstává pouze sčítanec s derivací $C'(x)$: $C'(x)x^5 = x^2$,

upravíme $C'(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$

a odtud vypočítáme integrační konstantu $C(x) = \int C'(x)\,dx = \int x^{-3}dx = \dfrac{x^{-2}}{-2} + K = -\dfrac{1}{2x^2} + K$.

III. Obecné řešení zadané lineární diferenciální rovnice získáme dosazením vypočítané konstanty do předpokládaného tvaru řešení (3):

$y = (-\dfrac{1}{2x^2} + K)x^5$, po úpravě $\boxed{y = Kx^5 - \dfrac{x^3}{2}}$.

$x \in (-\infty, 0)$
$x \in (0, \infty)$

Je zřejmé, že obecné řešení tvoří dvě části: $y = y_0 + \hat{y}$,

kde $y_0 = Kx^5$ je řešení zkrácené rovnice,

$\hat{y} = -\dfrac{x^3}{2}$ je partikulární integrál odpovídající pravé straně $Q(x)$.

Příklad 7.11: Vyřešte diferenciální rovnici $y' + xy = x$, platí-li $y(0) = 4$.

Řešení: Budeme dodržovat uvedený postup I. – III. uvedený v příkladu 7.10:

I. Vyřešíme příslušnou zkrácenou rovnici $y' + xy = 0$, která je vždy separovatelná, postupem uvedeným v 7.2.2.

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy \quad \Big|dx$$

Poznámka: Uvedený příklad $y' + xy = x$ vyřešíme i jiným postupem:

Stačí, když provedeme jednoduchou úpravu $y' = x - xy \quad \Rightarrow \quad y' = x(1-y)$.

Získáme separovatelnou rovnici, kterou vyřešíme postupem uvedeným v 7.2.2.

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y) \quad \Big| dx$$

$$dy = x(1-y)dx \quad \Big|\frac{1}{1-y}, \quad y \neq 1$$

$$\frac{dy}{1-y} = x\,dx$$

$$-\int \frac{-dy}{1-y} = \int x\,dx$$

$-\ln|1-y| = \dfrac{x^2}{2} + \ln C$, což je obecné řešení, které můžeme (ale nemusíme) dále upravit:

$$\ln\left|(1-y)^{-1}\right| = \ln e^{\frac{x^2}{2}} + \ln C$$

$$(1-y)^{-1} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{1}{1-y} = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad 1-y = \frac{1}{Ce^{\frac{x^2}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1 + Ke^{-\frac{x^2}{2}}}, \qquad \text{kde} \quad K = -\frac{1}{C}$$

Z tohoto příkladu je zřejmé, že diferenciální rovnice nemusí být pouze jednoho typu. Pokud splňuje současně podmínky pro více typů, volíme vždy jednodušší postup řešení (v uvedeném příkladě je to řešení separovatelné diferenciální rovnice).

(12) *Příklad 7.12:* Vyřešte diferenciální rovnici $y' - \dfrac{3x^2y}{1+x^3} = 1 + x^3, \quad x \neq -1$, platí-li $y(1) = -1$.

Řešení: Budeme dodržovat uvedený postup I – III uvedený v příkladu 7.10:

I. Vyřešíme příslušnou zkrácenou rovnici $y' - \dfrac{3x^2y}{1+x^3} = 0$,

která je vždy separovatelná, postupem uvedeným v 7.2.2.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y}{1+x^3} \quad \Big| dx$$

$$dy = \frac{3x^2y}{1+x^3}dx \quad \Big|\frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$\ln|y| = \ln\left|1+x^3\right| + \ln C$$

Řešení upravíme využitím pravidel pro počítání s logaritmy:

$\ln|y| = \ln C\left|1+x^3\right|$

$y = C(1+x^3)$, což je předpokládaný tvar řešení. (5)

II. Integrační konstantu C budeme považovat za funkci proměnné x: $C = C(x)$

Dosadíme za ni do (5): $y = C(x).(1+x^3)$

Derivujeme součin: $y' = C'(x).(1+x^3) + C(x).3x^2$

Za y a y' dosadíme do zadání: $C'(x).(1+x^3) + 3C(x).x^2 - \dfrac{3x^2C(x).(1+x^3)}{1+x^3} = 1+x^3$

Následuje kontrolní krok: sčítance s $C(x)$ se vzájemně vyruší, zůstává pouze sčítanec

s derivací $C'(x)$: $C'(x).(1+x^3) = 1+x^3$, po vykrácení $C'(x) = 1$

a vypočítáme integrační konstantu $C(x) = \int C'(x)\,dx = \int 1\,dx = x + K$.

III. Obecné řešení zadané lineární diferenciální rovnice získáme dosazením vypočítané konstanty do předpokládaného tvaru řešení (5): $\boxed{y = (x+K)(1+x^3)}$. $x \in (-\infty, -1)$

Z podmínky $y(1) = -1$ vyplývá, že hledáme partikulární řešení, které prochází bodem $x \in (-1, \infty)$ P[1,-1]. Po dosazení do obecného řešení vypočítáme hodnotu integrační konstanty:

$-1 = (1+K)(1+1^3)$ a odtud vypočítáme $K = -\dfrac{3}{2}$.

Partikulární řešení: $y = (x - \dfrac{3}{2})(1+x^3)$, po úpravě $\boxed{y = x^4 - \dfrac{3}{2}x^3 + x - \dfrac{3}{2}}$.

Poznámka: Existuje řada dalších typů diferenciálních rovnic I. řádu, které nejsou zařazeny do tohoto stručného přehledu.

7.3. Diferenciální rovnice II. řádu

Ve stručném přehledu se budeme zabývat výhradně řešením lineárních diferenciálních rovnic II. řádu s konstantními koeficienty.

Obecný tvar: $\boxed{a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x)}$, kde $a_2 \neq 0, a_1,\ a_0$ jsou reálné konstanty.

Dělíme je do dvou typů: zkrácená pro $Q(x) = 0$: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$

úplná pro $Q(x) \neq 0$: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x)$

Řešením lineárních diferenciálních rovnic II. řádu se zabýval švýcarský matematik Leonhard Euler.

7.3.1. Zkrácená rovnice

$\boxed{a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0}$

Euler zjistil, že řešení má tvar $y = e^{rx}$, kde r je konstanta, zvaná charakteristický kořen.

Pro derivace platí $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$.

Dosadíme do zadání $a_2r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} = 0$, *Řešení:* Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y &= xy' \,, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \,, \\
\ln|y| &= \ln|x| + C_1 \,, \\
y &= cx \,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y &= c(x)x \,, \\
c(x)x &= xc'(x)x + xc(x) - x^2 \cos x \,, \\
c'(x) &= \cos x \,, \\
c(x) &= \sin x + c_2 \,, \\
y(x) &= (c_2 + \sin x)x \,.
\end{aligned}
$$

(1i)

Příklad 3.3. *Řešte rovnici* $xy' + (x+1)y = 3x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$x \in (-\infty, 0)$

$x \in (0, \infty)$

$$
\begin{aligned}
xy' + (x+1)y &= 0 \,, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \,, \\
\ln|y| &= -x - \ln x + c_1 \,, \\
y(x) &= \mathrm{e}^{-x} \frac{c}{x} \,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{c(x)}{x} \mathrm{e}^{-x} \,, \\
c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{c(x)}{x}\mathrm{e}^{-x} + c\mathrm{e}^{-x} + \frac{c}{x}\mathrm{e}^{-x} &= 3x^2 \mathrm{e}^{-x} \,, \\
c'(x) = 3x^2 \quad &\Rightarrow \quad c(x) = x^3 + c_2 \,, \\
y(x) &= \left(x^2 + \frac{c_2}{x}\right) \mathrm{e}^{-x} \,.
\end{aligned}
$$

Příklad 3.4. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Řešení: Rovnici si upravíme do tvaru

$$
\frac{3x - y^2}{y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \,,
$$

což odpovídá rovnici

$$
x'(y) = \frac{3x}{y} - y \,.
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,,\\
c'(x)\mathrm{e}^{-x^2} + c(x)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2xc(x)\mathrm{e}^{-x^2} &= 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,,\\
c'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^2 + c_2\,,\\
y(x) &= (x^2 + c_2)\mathrm{e}^{-x^2}\,.
\end{aligned}
$$

(11)

Příklad 3.7. *Řešte rovnici* $xy' + 2y = 3x$, $y(0) = 0$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
xy' + 2y &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{2}{x}\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -2\ln|x| + c_1\,,\\
y &= \frac{c}{x^2}\,.
\end{aligned}
$$

$x \in (-\infty, 0)$

$x \in (0, \infty)$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{c(x)}{x^2}\,,\\
x\frac{c'(x)}{x^2} + (-2)x\frac{c(x)}{x^3} + \frac{2c(x)}{x^2} &= 3x\,,\\
c'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^3 + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{c_2}{x^2} + x\,.
\end{aligned}
$$

Z počáteční podmínky

$$c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x\,.$$

(12)

Příklad 3.8. *Řešte rovnici* $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' + y\cos x &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \cos x\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -\sin x + c_1\,,\\
y &= c\mathrm{e}^{-\sin x}\,.
\end{aligned}
$$

(1k)

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}\,, \\
c'(x)\mathrm{e}^{-\sin x} + (-\cos x)c(x)\mathrm{e}^{-\sin x} + c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}\cos x &= \sin x\cos x\,, \\
c'(x) &= \sin x\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\,, \\
c(x) = \int \sin x\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= (At+B)\mathrm{e}^t\,, \\
A + At + B = t \quad\Rightarrow\quad A &= 1, B = -1\,, \\
c(x) = (t-1)\mathrm{e}^t + c_2 &= (\sin x - 1)\mathrm{e}^{\sin x} + c_2\,, \\
y(x) &= \sin x - 1 + c_2\mathrm{e}^{-\sin x}\,, \\
y(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad 1 = -1 + c_2 \quad\Rightarrow\quad c_2 &= 2\,, \\
y(x) &= \sin x - 1 + 2\mathrm{e}^{-\sin x}\,.
\end{aligned}
$$

(1l)

Příklad 3.9. *Řešte rovnici* $(1-x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$.

Řešení: Homogenní rovnice:

pro $x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)y' + xy &= 0\,, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,, \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c_1\,, \\
y(x) &= c\sqrt{|x^2-1|}\,.
\end{aligned}
$$

Řešení proto budeme uvažovat ve tvaru (pro výraz uvnitř odmocniny bereme v úvahu počáteční podmínku) $y(x) = c(x)\sqrt{1-x^2}$. Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)c'(x)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)c(x)\frac{1/2(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} + xc(x)\sqrt{1-x^2} &= 1\,, \\
c'(x) &= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,. \\
c(x) = \int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = |x = \sin t\,,\quad \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t| = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t &= \\
= \left|u = \operatorname{tg} t\,,\quad \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\right| = \int \mathrm{d}u = u + c_1 &= \\
= \left|\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\right| = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c_1\,. & \\
c(x) = x(1-x^2)^{-1/2} + c_1 \quad\Rightarrow\quad y(x) = x + c_1\sqrt{1-x^2}\,. &
\end{aligned}
$$

*

Z počáteční podmínky:

$$
1 = c_1 \quad\Rightarrow\quad y(x) = x + \sqrt{1-x^2}\,.
$$

* nelze slepit ⍨ (nelze spoj. dodef)

(1m) **Příklad 3.10.** *Řešte rovnici* $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$.

$x \neq k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' - y\frac{\cos x}{\sin x} &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln|\sin x| + c_1\,,\\
y &= c\sin x\,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\sin x\,,\\
c'(x)\sin x + c(x)\cos x - c(x)\cos x &= 2\sin x\,,\\
c(x) &= \int 2\,\mathrm{d}x = 2x + c_2\,,\\
y(x) &= (2x + c_2)\sin x\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 3.11. *Řešte rovnici* $y' + xy = x$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' + xy &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int x\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + c_1\,,\\
y &= c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,,\\
c'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - c(x)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + xc(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} &= x\,,\\
c'(x) &= x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,,\\
c(x) = \int x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \left| u = \frac{x^2}{2}, \quad \mathrm{d}u = x\mathrm{d}x \right| = \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u &= \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + c_2\,,\\
y(x) &= 1 + c_2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 3.12. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y-1}{x(x-1)}$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x(x-1)}\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln\frac{x-1}{x} + c_1\,,\\
y &= c\frac{x-1}{x}\,.
\end{aligned}$$

Variace konstanty:

$$\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\frac{x-1}{x}\,,\\
c'(x)\frac{x-1}{x} + c(x)\left(\frac{x-1}{x}\right)' &= \frac{c(x)}{x^2} - \frac{1}{(x-1)x}\,,\\
c'(x)\frac{x-1}{x} + c(x)\left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right)' &= \frac{c(x)}{x^2} - \frac{1}{(x-1)x}\,,\\
c'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2}\,,\\
c(x) &= \frac{1}{x-1} + c_2\,,\\
y(x) = \frac{1}{x} + c_2\frac{x-1}{x} &= 1 + c_3\frac{x-1}{x}\,.
\end{aligned}$$

(1h) **Příklad 3.13.** *Řešte rovnici* $y' + 3y = \mathrm{e}^{2x}$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned}
y' + 3y &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 3\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -3x + c_1\,,\\
y &= c\mathrm{e}^{-3x}\,.
\end{aligned}$$

Variace konstanty:

$$\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-3x}\,,\\
c'(x)\mathrm{e}^{-3x} + c(x)\mathrm{e}^{-3x}(-3) + 3c(x)\mathrm{e}^{-3x} &= \mathrm{e}^{2x}\,,\\
c'(x) &= \mathrm{e}^{5x}\,,\\
c(x) &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x}\,.
\end{aligned}$$

(1b) **Příklad 3.14.** *Řešte rovnici* $y' + y = \cos x$.

(1b)

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' + y &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 1\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -x + c_1\,,\\
y &= c\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-x}\,,\\
c'(x)\mathrm{e}^{-x} + c(x)\mathrm{e}^{-x}(-1) + c(x)\mathrm{e}^{-x} &= \cos x\,,\\
c(x) = \int \mathrm{e}^{x}\cos x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}(\sin x + \cos x) + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + c_2\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}
$$

(1p)

Příklad 3.15. *Řešte rovnici* $xy' - \frac{y}{x+1} = x$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$x \neq -1$

pro $x \in (-\infty, -1)$
$(-1, 0)$
$(0, \infty)$

$$
\begin{aligned}
xy' &= \frac{y}{x+1}\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{1}{(x+1)x}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c_1\,,\\
y &= c\frac{x}{x+1}\,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\frac{x}{x+1}\,,\\
xc'(x)\frac{x}{x+1} + c(x)x\frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{c(x)x}{(x+1)^2} &= x\,,\\
c'(x) = \frac{x+1}{x} &= 1 + \frac{1}{x}\,,\\
c(x) &= x + \ln|x| + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + c_2)\,.
\end{aligned}
$$

slepit v 0 nelze

Příklad 3.16. *Řešte rovnici* $(2\mathrm{e}^{y} - x)y' = 1$.

Řešení: Použijeme triku, že hledáme řešení $x(y)$ jako funkce od y.

$$x' = -x + 2\mathrm{e}^{y}\,.$$

Cvičení 1

LINEÁRNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

(1q)

1. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x \operatorname{tg} t = \cos^2 t$, které vyhovuje podmínce $x(2\pi) = 2$.
Řešení:
Máme nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Funkce $h(t) = \operatorname{tg} t$ a $q(t) = \cos^2 t$ jsou definované a spojité v intervalech $\left(\frac{2k-1}{2}\,\pi, \frac{2k+1}{2}\,\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože je počáteční podmínka definována v bodě $t_0 = 2\pi$. Budeme hledat řešení v intervalu $t \in \left(\frac{3}{2}\,\pi, \frac{5}{2}\,\pi\right)$.
Nejprve určíme řešení příslušné homogenní rovnice

$$u' + u \operatorname{tg} t = 0\,.$$

To je $u(t) = C \cos t$. Jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme variací konstanty. Řešení budeme hledat ve tvaru $w(t) = C(t)\cos t$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(t) = \cos t$, neboli $C(t) = \sin t$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je $x(t) = C\cos t + \sin t \cos t$. Z podmínky $x(2\pi) = 2$ plyne, $C = 2$. Řešení Cauchyovy úlohy je tedy

$$x(t) = (2 + \sin t)\cos t \quad \text{pro} \quad t \in \left(\frac{3}{2}\,\pi, \frac{5}{2}\,\pi\right).$$

(1r)

2. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 2tx = t - t^3$, které vyhovuje podmínce $x(1) = 1$.
Řešení:
Máme najít řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Proto nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $u' = 2tu$. Standardním způsobem získáme její řešení $u = C\mathrm{e}^{t^2}$. Řešení nehomogenní rovnice $w(t)$ získáme variací konstanty, tj. předpokládáme, že $w(t) = C(t)\mathrm{e}^{t^2}$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $C'(t) = (t - t^3)\mathrm{e}^{-t^2}$, čili $C(t) = \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Tedy hledané řešení nehomogenní rovnice je $w(t) = \frac{t^2}{2}$ a obecné řešení dané diferenciální rovnice je $x(t) = C\mathrm{e}^{t^2} + \frac{t^2}{2}$. Z počáteční podmínky plyne rovnost $x(1) = 1 = C\mathrm{e} + \frac{1}{2}$. Tedy $C = \frac{1}{2\mathrm{e}}$. Když dosadíme tuto konstantu do obecného řešení, získáme hledané řešení Cauchyho úlohy

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2-1} + t^2}{2}\,.$$

(1s)

3. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + \frac{2x}{t^2-1} = t$, které vyhovuje podmínce $x(0) = 1$.
Řešení:
Máme řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Funkce $h(t) = -\frac{2}{t^2-1}$ a $q(t) = t$ jsou definované a spojité v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$. Protože počáteční podmínka je dána v bodě $t_0 = 0$, který leží v intervalu $(-1, 1)$, budeme hledat řešení rovnice v tomto intervalu.
Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice $u' + \frac{2u}{t^2-1} = 0$. Standardní metodou dostaneme

$$\frac{u'}{u} = \frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

(15)

a po integraci získáme $u(t) = C\,\dfrac{1+t}{1-t}$.

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $w(t) = C(t)\,\dfrac{1+t}{1-t}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$C'(t) = \frac{t(1-t)}{1+t} = -t + 2 - \frac{2}{1+t}\,, \quad \text{neboli} \quad C(t) = -\frac{1}{2}\,(2-t)^2 - 2\ln(1+t)\,.$$

Partikulární řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice je tedy $w(t) = \dfrac{1+t}{1-t}\left(-\dfrac{(t-2)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right)$ a obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$x(t) = \frac{1+t}{1-t}\left(C - \frac{(2-t)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right).$$

Z podmínky $x(0) = 1 = C - 2$ plyne, že $C = 3$, a tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = \frac{1+t}{1-t}\left(3 - \frac{(2-t)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right) \quad \text{pro} \quad t \in (-1,1)\,.$$

---

4. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 2x = t^2$, které vyhovuje podmínce $x(-1) = 0$.

Řešení:

Máme řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Tato rovnice je speciálního typu. Funkce $h(t) = 2$ je konstantní. Proto lze hledat řešení příslušné homogenní rovnice $u' - 2u = 0$ ve tvaru $u = e^{\lambda t}$. Jestliže tento předpoklad dosadíme do homogenní rovnice, dostaneme $\lambda - 2 = 0$, která se nazývá *charakteristická rovnice*. Její řešení je $\lambda = 2$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je $u(t) = Ce^{2t}$.

Také partikulární řešení nehomogenní rovnice lze v tomto případě najít bez integrace. Protože pravá strana $q(t) = t^2$ je polynom stupně 2 a $\mu = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, lze partikulární řešení nehomogenní rovnice hledat ve tvaru $w = at^2 + bt + c$, kde a, b a c jsou konstanty. Dosazením do původní rovnice a srovnáním koeficientů u různých mocnin proměnné t, dostaneme soustavu rovnic $-2a = 1$, $2a - 2b = 0$ a $b - 2c = 0$, která má řešení $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ a $c = -\frac{1}{4}$. Proto je partikulární řešení nehomogenní rovnice rovno $w(t) = -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$ a její obecné řešení je $x(t) = Ce^{2t} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$. Z počáteční podmínky plyne $x(-1) = 0 = Ce^{-2} - \frac{1}{4}$, tedy $C = \frac{e^2}{4}$. Z toho dostáváme hledané řešení Cauchyho úlohy

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(e^{2(t+1)} - 2t^2 - 2t - 1\right).$$

---

5. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + 4x = te^{-4t} + 4t - 3$, které vyhovuje podmínce $x(0) = 2$.

Řešení:

Máme opět řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda + 4 = 0$ má řešení $\lambda = -4$, a tedy obecné řešení homogenní rovnice je $u(t) = Ce^{-4t}$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, kde $w_1(t)$ je partikulární řešení rovnice $w_1' + 4w_1 = te^{-4t}$ a w_2 je partikulární řešení rovnice $w_2' + 4w_2 = 4t - 3$. Protože $\mu = -4$ je řešením charakteristické rovnice, budeme hledat funkci w_1 ve tvaru $w_1(t) = t(at + b)e^{-4t}$. Jestliže tento předpoklad dosadíme do rovnice pro w_1, dostaneme po srovnání koeficientů u různých mocnin proměnné t soustavu rovnic $2a = 1$ a $b = 0$. Tedy $w_1(t) = \frac{t^2}{2}\,e^{-4t}$. Funkci w_2 budeme hledat ve tvaru $w_2(t) = At + B$, protože $\mu = 0$ není řešení

(2)
(a) $y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$ $\qquad x \neq 0$

· $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$

$\ln|y| = -\ln x + k$

$|y| = e^k \cdot e^{\ln\frac{1}{x}}$

$y = k \cdot \frac{1}{x} \qquad k \in \mathbb{R}$

· $k' \cdot \frac{1}{x} + k \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot k\frac{1}{x} = e^{x^2}$

$k' = xe^{x^2}$ $\qquad$ subst.

$k = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

· $y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right)$

(b)

$y' - y\ln x = x^{x+1}$ $\qquad x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x}$ $\qquad \boxed{x>0}$

- $y = y\ln x$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \ln x\,dx$ per partes

$\ln|y| = x\ln x - x + k$

$|y| = e^{\ln x^x - x + k}$

$\underline{y = k\,e^{-x}\cdot x^x}$

- $y_p = k(x)\,e^{-x}\cdot x^x = k\,e^{-x}e^{x\ln x}$

$k' e^{-x}x^x + k\left(-e^{-x}x^x + e^{-x}x^x\cdot(\ln x + 1)\right) - k\,e^{-x}x^x\ln x = x^{x+1}$

$\underline{k' e^{-x} x^x = x^{x+1}}$

$k' = e^x\cdot x$ per partes

$\underline{k = e^x x - e^x + C}$

celkem $\quad \underline{y = (e^x x - e^x + c)\,e^{-x}\cdot x^x} \quad x\in(0,\infty)$

(c)

$xy' - 2y = 2x^4$ $\quad x \in \mathbb{R}$

- $y' - 2y \cdot \frac{1}{x} = 2x^3$ $\quad x \neq 0$

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$

$\ln|y| = 2\ln x + k$

$\underline{y = kx^2}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

- $k'x^2 + k \cdot 2x - 2kx^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x^3$ $\quad x > 0$

$k' = 2x$

$k = x^2 + c_1$

- $y = (x^2 + c_1)x^2$ $\quad x > 0$

- pro $x < 0$ dostaneme

$y = (x^2 + c_2)x^2$

- v 0 lze slepit,

$$y = \begin{cases} x^2(x^2+c_2) & x \in (-\infty, 0) \\ x^2(x^2+c_1) & x \in [0, \infty) \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

máme v 0 derivaci? Lze přímo upočítat, fce je spoj.

$y'_+ = \lim_{x \to 0+} 4x^3 + 2c_1x = 0$

$y'_- = \lim_{x \to 0-} 4x^3 + 2c_2x = 0$

Všechno ok

(d)

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x} \sin x$$

- $\frac{y'}{y} = -3x^2$

$\ln|y| = -x^3 + c$

$y = e^{-x^3} \cdot k \quad k \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- $e^{-x^3} \cdot k' + k e^{-x^3}(-3x^2) + 3x^2 k e^{-x^3} = e^{-x^3+x} \sin x$

$k' = e^x \sin x$ 2x per partes

$k = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$

$y = e^{-x^3}\left(\frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c\right) \quad x, c \in \mathbb{R}$

(e)

$$y'(1+x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1+x^2)$$

$$y' + \frac{y}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2 \qquad x \in (-\infty, 0)$$
$$x \in (0, \infty)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{\arctan x\,(1+x^2)}$$

$$\ln|y| = -\ln|\arctan x| + k$$

$$y = k\,\frac{1}{\arctan x} \qquad x \neq 0$$

$$k'\frac{1}{\arctan x} + k\,\frac{-1}{\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{k\,\frac{1}{\arctan x}}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2$$

$$k' = x^2 \arctan x \qquad \text{per partes}$$

$$\int x^2 \arctan x = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{2x^3}{2(1+x^2)}\,dx$$

celkem

$$u' = x^2 \qquad v = \arctan x \qquad u = 1+x^2$$

$$k = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c \qquad u = \frac{1}{3}x^3 \qquad v' = \frac{1}{1+x^2} \qquad du = 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}(u - \ln u)$$

$$y = \frac{1}{\arctan x}\left[\frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c\right]$$

$$x \neq 0$$

(f) $y' + \frac{x}{1+x^2} y = 1$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

$$y = k \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (= k(1+x^2)^{-1/2})$$

$$k' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot 2x + \frac{x k}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$k' = \sqrt{1+x^2}$$

buď spec. subst. $y = \sinh x$

nebo Euler. subst.

$$t = \sqrt{x^2+1} + x$$

pak (z tabulky) $x = \frac{t^2-1}{2t}$

$$\sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t}$$

a $dx = \frac{2t \cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2}{4t^2}\, dt$

máme

$$\int \left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{(t^2+1)\cdot(t^2+1)}{4t^3}\, dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^3}\, dt = \frac{1}{4} \int t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2 \ln t + \frac{-1}{2t^2}\right) \rightarrow$$

$$k = \underbrace{\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2 + \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + x)^2} + c}$$

pak $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Big[\qquad - \shortparallel - \qquad \Big]$

$x \in \mathbb{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (F)
LS 2003-2004, 17.9. 2004

Příklad F1: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x\sqrt{y} \qquad (10 \text{ bodů}).$$

Příklad F2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 1. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y' = x\sin x. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = e^{x+y} - 1. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F5: Najděte všechna $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^3$ taková, že maximální řešení $\boldsymbol{y}$ počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$$

splňuje $\lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}(t)}{t} e^{-t} = \boldsymbol{o}$. (10 bodů)

Výsledky

Příklad F1: $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2$, $x \in \mathbf{R}$, $c > 0$;

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (\sqrt{-2c}, +\infty), \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_1)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_2)^2, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases} \quad c_1 \le 0,\ c_2 \le 0;$$

jiná substituce dá

Příklad F2: $y(x) = \left(\frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2} - x) - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2} - x)^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F3: $y(x) = -\frac{3}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2 \sin x + c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Příklad F4: $y(x) = -\log(-x - c) - x$, $x \in (-\infty, -c)$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F5: $\left\{k\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbf{R}\right\}$

Celkem tedy dostávám $y_{1,2}(x) = \pm\sqrt{2\log(d(1+e^x))}$, a to na intervale $\mathbb{R}$ pro $d \geq 1$ a na $\left(\log\left(\frac{1}{d}-1\right),\infty\right)$ pro $d \in (0,1)$.

4. krok
Lepit opět není co a kde.

3 a

7. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$. Opět vidíme, že $x \neq 0$, a tedy tím můžeme podělit. Dostaneme homogenní rovnici
$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$
Opět provedeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, již máme spočteno, že pak $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dohromady
$$z + xz' = e^z + z,$$
tedy
$$z' = \frac{1}{x}e^z.$$
Opět separované proměnné, opět Poznámka 3.

1. krok
Funkce $\frac{1}{x}$ je definována na intervalech $I_1 = (-\infty,0)$ a $I_2 = (0,\infty)$.

2. krok
Funkce e^z je vždy nenulová a definovaná, tedy $J = \mathbb{R}$.

3. krok
Výpočet pro $x \in I_2$, tj. $x > 0$:
$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$
Tedy
$$-e^{-z(x)} = \log x + c = \log(dx)$$
pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok
Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, potřebuju aby $-\log(dx) > 0$. Tedy $dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (0,\frac{1}{d})$. Pak
$$z = -\log(-\log(dx)) \quad d > 0.$$

3. krok
Výpočet pro $x \in I_1$, tj. $x < 0$:
$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$
Tedy
$$-e^{-z} = \log(-x) + c = \log(-dx)$$
pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok
Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, tak potřebuju aby platilo $-\log(-dx) > 0$. Tedy $-dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (-\frac{1}{d},0)$. Pak
$$z = -\log(-\log(-dx)), \quad d > 0.$$

5. krok
Lepit opět nikde nelze.

Nakonec to ještě shrneme, a vrátíme se k y. Dohromady to mohu napsat jako

$$y(x) = xz(x) = -x\log(-\log(dx)), \quad d \neq 0$$

na intervalech $(\frac{1}{d}, 0)$ a $(0, \frac{1}{d})$.

Poznamenejme ještě, že se to dá zapsat také pomocí konstanty c, tedy

$$y(x) = -x\log(-\log(|x|) - c), \quad c \in \mathbb{R}$$

na intervalech $(-e^{-c}, 0)$ a $(0, e^{-c})$.

3. $y' = \sqrt[3]{y}$. Opět viz Poznámku 3, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ a $h(x) = 1$.

<u>**1. krok**</u>
Zřejmě $I = \mathbb{R}$.

<u>**2. krok**</u>
g je definována všude (tj. na $\mathbb{R}$), nulová je pouze v 0 (tedy máme řešení $y \equiv 0$) a tedy máme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

<u>**3. krok**</u>
Integrujme:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1,$$

tedy

$$\frac{3}{2} y(x)^{\frac{2}{3}} = x + c.$$

<u>**4. krok**</u>
Vidíme, že bez ohledu na znaménko y musí být $x + c > 0$, tedy $x \in (-c, \infty)$. Je-li $y < 0$ (tj. uvažujeme J_1), pak $y = -\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$. Jeli $y > 0$, pak $y = \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$.

<u>**5. krok**</u>
Vidíme, že v obou případech je $\lim\limits_{x \to (-c)^+} \pm \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}} = 0$, tedy zde můžeme přilepit nulové řešení. Celkem dostaneme řešení

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \pm\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}, & x > c. \end{cases}.$$

A nesmíme zapomenout, že navíc ještě máme singulární řešení $y_3(x) = 0$.

4. $xy' - y\left(1 + \log \dfrac{y}{x}\right) = 0$. Vidíme, že pro $x = 0$ to nedává smysl, a tedy ani žádné řešení nemůže nulou procházet. Tedy zadanou rovnici můžeme podělit x. Dostaneme

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \log \frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Jedná se tedy o homogenní rovnici, a tedy použijeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak $y(x) = xz(x)$, a tedy $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dosadíme do (3):

$$z + xz' = z(1 + \log z)$$

Tedy po úpravě (již víme, že x můžeme podělit):

$$z' = \frac{1}{x} z \log z$$

To už je rovnice se separovanými proměnnými, a tedy můžeme postupovat podle Poznámky 3.

<u>**1. krok**</u>
Vidíme, že pro $x = 0$ to není definované, a tedy máme dva intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

2. krok
Nulový bod funkce $z \log z$ je 1. Tedy máme singulární řešení a dva intervaly $J_1 = (0,1)$ a $J_2 = (1,\infty)$. (Pro $z \leq 0$ není $z \log z$ definováno.)

3. krok
Integrujeme pro $x < 0$.

$$\frac{z'(x)}{z(x)\log z(x)} = \frac{1}{x},$$

tedy pomocí substituce $\check{z} = z(x)$

$$\int \frac{1}{\check{z}\log\check{z}}\,\mathrm{d}\check{z}\bigg|_{\check{z}=z(x)} = \log x + c.$$

Dále můžeme provést substituci $\check{\check{z}} = \log(\check{z})$, tedy $\check{\check{z}} = \log(z(x))$. Pak

$$\int \frac{1}{\check{\check{z}}}\,\mathrm{d}\check{\check{z}}\bigg|_{\check{\check{z}}=\log\check{z},\ \check{z}=z(x)} = \log x + c.$$

Tedy dohromady

$$\log(|\log(z(x))|) = \log x + c.$$

Zbavíme se 1. logaritmu (zatím může být x a $c \in \mathbb{R}$ libovolné):

$$|\log(z)| = e^{c-\log x} = e^c x.$$

4. krok
Pro $z \in J_1$, tj. $0 < z < 1$ máme $\log z < 0$, a tedy

$$z = e^{-e^c x}.$$

Pro $z \in J_2$, tj. $1 < z$ máme $\log z > 0$, a tedy

$$\underline{z = e^{e^c x}}.$$

Tedy pro $d = e^c$, dostaneme najednou řešení

$$z(x) = e^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(Interval J_1 vyhodí výsledek pro $d < 0$, interval J_2 vyhodí výsledek pro $d > 0$ a případ $d = 0$ odpovídá singulárnímu řešení.

Pro interval $I_1 = (-\infty, 0)$ bychom obdobným postupem dostali stejné řešení. Lepit zde nemusíme, neboť e^{dx} se pro $d \neq 0$ a $x \neq 0$ se singulárním řešením nikde nepotká.

Nakonec se ještě nesmíme zapomenout vrátit k y. Víme, že $y(x) = xz(x)$, tedy

$$\underline{y(x) = xe^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.}$$

$\log(k\,|x|) > \log 4$, neboli $x \in (\frac{4}{k}, \infty)$. Pro tato x pak platí

$$\frac{(y-2)^2}{y-3} = kx,$$

což vede na rovnici

$$y^2 + y(-4 - kx) + (4 + 3kx) = 0.$$

Ta má řešení

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(4 + kx \pm \sqrt{(4+kx)^2 - 4(4+3kx)}\right) = 2 + \frac{kx}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Jelikož platí $\frac{kx}{2} > 2$ a $y(x) \in (3, 4)$, zajímá nás řešení

$$y(x) = 2 + \frac{kx}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Požadavek $y(1) = \frac{7}{2}$ implikuje $k = \frac{9}{2}$, což dává řešení

$$y(x) = 2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}x(\frac{9}{2}x - 4)}, \quad x \in (\frac{8}{9}, \infty).$$

(6) Zkoumejme chování řešení pro $x \to \frac{8}{9}+$. Pak $y(x) \to 4$, avšak v bodě $[\frac{8}{9}, 4]$ není rovnice splněna, neboť se levá strana rovnice

$$\frac{8}{9} \cdot 0 \cdot y'(\frac{8}{9})$$

nemůže rovnat pravé straně, totiž 2.

♣

3a

13.7.3. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}.$$

Řešení. Uvažujme substituci $y = zx$. Pak $y' = z'x + z$, a tedy zadaná rovnice přejde na tvar

$$z'x + z = z - \sqrt[3]{z+1},$$

tj.

$$z' = \frac{-\sqrt[3]{z+1}}{x}.$$

Dostáváme tak rovnici se separovanými proměnnými.

(1) Zjevně $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení je $z = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(3) Intervaly pro z jsou tvaru $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.

(4) Jelikož

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$$

a

$$\int -\frac{1}{\sqrt[3]{z+1}}\,\mathrm{d}z = -\frac{3}{2}(z+1)^{\frac{2}{3}},$$

existuje $k > 0$ takové, že platí

$$-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2 = \log(k\,|x|).$$

(5) Na intervalu $J_1 = (-\infty, -1)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $\log(k\,|x|) < 0$, což znamená $x \in (0, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}, 0)$. Máme tak řešení

$$\underline{z(x) = -1 - \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3}, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

Pro interval $((-1, \infty)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ též zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Jako výše tak dostáváme řešení

$$\underline{z(x) = -1 + \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3}, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

(6) Eventuální lepení nelze provést v 0, neboť zde rovnice nemá smysl. V bodech $\pm\frac{1}{k}$ však $z(x)$ konverguje k -1, a tedy <u>lze lepit</u> na stacionární řešení. Dostáváme tak maximální řešení

$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -1, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Přechodem k původní rovnici tak máme řešení

$$y(x) = \begin{cases} -x \pm x\left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -x, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -x \pm x\left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

(Konstanta k je kladná.) Navíc pak ještě máme řešení

$$y(x) = -x, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

13.7.4. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{2x(x+3)}.$$

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kde $h(x) = \frac{3}{x(x+3)}$ a $g(y) = \frac{1}{2}(y^2+1)$.

(1) Intervaly pro funkci h jsou $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ a $(0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení žádná nejsou.
(3) Funkce g je nenulová na $\mathbb{R}$, tj. $J = \mathbb{R}$.
(4) Jelikož

$$\int \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 2\operatorname{arctg} y$$

a

$$\int \frac{3}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \log\left|\frac{x}{x+3}\right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$2\operatorname{arctg} y = \log\left|\frac{x}{x+3}\right| + c.$$

Tedy

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+3}\right| + \frac{c}{2}\right) \tag{13.20}$$

na intervalech, které určíme v následujícím kroku.
(5) Nechť $I = (0, \infty)$. Funkce $2\operatorname{arctg} y$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(-\pi, \pi)$ a $\left|\frac{x}{x+3}\right| = \frac{x}{x+3}$ na $(0, \infty)$. Tedy řešíme nerovnici

$$\log\frac{x}{x+3} + c \in (-\pi, \pi).$$

Nerovnost

$$\frac{x}{x+3} > e^{-\pi-c}$$

není nikdy splněna, pokud $c \le -\pi$, a pro $c > -\pi$ vede na nerovnost

$$x > \frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$

Druhá nerovnost

$$\frac{x}{x+3} < e^{\pi-c}$$

je pro $c \le \pi$ splněna vždy, zatímco pro $c > \pi$ implikuje nerovnost

$$x < \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$

Odtud dostáváme

$$X \in \left(0, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{respektive } X \in \left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Ze vztahu mezi Z a X máme

$$Z^2 - Z + 1 - e^C X^{-2} = 0,$$

neboli

$$Z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right).$$

Dosazením do substituce dostáváme

$$Y(X) = \frac{1}{2}\left(X \pm X\sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right) = \frac{1}{2}\left(X \pm \sqrt{4e^C - 3X^2}\right).$$

Vidíme, že toto řešení lze dodefinovat v 0 a bude zde vyhovovat naší rovnici.

Dále pak máme

$$y(x) = Y(x+A) - B = \frac{1}{2}\left(x + 1 \pm \sqrt{4e^C - 3(x + \frac{1}{3})^2}\right)$$

na intervalu

$$\left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right).$$

Tento interval je maximální, neboť v jeho krajních bodech platí $y = \frac{1}{2}(x+1)$ a pravá strana rovnice není definována.

Nyní si rozmyslíme, že jsme obdrželi všechna řešení. Uvažujme výraz

$$\left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2,$$

který je kladný všude mimo bod $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Existuje tak $C > 0$, že

$$4e^C = \left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2.$$

Pokud $y_0 \neq \frac{1}{2}(x_0 + 1)$, dostáváme z poslední rovnice řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$. ♣

4a

13.7.17. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

Řešení. Jedná se o Bernoulliovu rovnici , a tedy použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Pak $z > 0$ a platí

$$z' = -2y^{-3}y'.$$

Po vydělení dané rovnice y^3 dostáváme

$$-\frac{1}{2}z' - xz = y'y^{-3} - xy^{-2} = -e^{-x^2},$$

♣

tj. rovnici
$$z' + xz = 2e^{-x^2}.$$
Metodfou integračního faktoru máme
$$\left(e^{x^2} z\right)' = 2,$$
neboli
$$z(x) = e^{-x^2} (2x + c)\,.$$
Zajímají nás pouze kladná řešení z, takže dostáváme řešení
$$y = \pm \left(e^{-x^2} (2x + c)\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x > -\frac{c}{2}, \quad c \in \mathbb{R},$$
a stacionární řešení
$$y = 0.$$
Z tvaru řešení je patrné, že lepení nepřichází do úvahy.

Řešení:

1. $y' = \dfrac{y}{x} + x$. Nejprve si všimneme, že pro $x = 0$ to není definováno, a tedy nulou žádné řešení procházet nemůže. Hledáme tedy řešení na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

   Postupujeme podle algoritmu z poznámky 3. Nejprve označme $a(x) := \frac{1}{x}$ a $b(x) := x$. Následně najdeme (libovolnou) primitivní funkci k a, tedy $A(x) = \log|x|$. (Vskutku $A'(x) = a(x)$.) Tedy můžeme dosadit do vzorečku pro řešení homogenní rovnice:

$$y_0 = Ke^{A(x)} = Ke^{\log|x|} = K|x|$$

   Následně hledáme jedno partikulární řešení, a postupujeme metodou variace konstanty, tedy řešení hledáme ve tvaru $y_p = K(x)|x|$. Buď toto zderivujeme ($y_p' = K'|x| + K \operatorname{sign} x$, neboť derivací absolutní hodnoty je mimo nulu signum) a dosadíme do rovnice, nebo prostě dosadíme do výsledku z algoritmu z Poznámky 3. Tedy

$$K'(x) = e^{-A(x)} b(x) = e^{-\log|x|} x = \frac{1}{|x|} x = \operatorname{sign} x.$$

   Z čehož lze rovnou vidět řešení $K(x) = |x|$. Dohromady $y_p = K(x)|x| = |x|^2 = x^2$.

   A všechna řešení jsou tedy ve tvaru

$$y(x) = x^2 + c|x|,$$

   kde $c \in \mathbb{R}$, a řešení máme na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Toto řešení si ještě můžeme napsat ve tvaru

4b

$$y(x) = x^2 + \widetilde{c}x,$$

   kde se nám znaménko z absolutní hodnoty schovalo do konstanty, tedy $\widetilde{c} = c \operatorname{sign} x$. Tato konstanta na každém z intervalů v definičním oboru na x nezávisí.

2. $xy^2y' = x^2 + y^3$. Na levé straně chceme samotné y', tedy předpokládejme že $x \neq 0$. Pak navíc $y \neq 0$ (kdyby $y = 0$, pak by muselo platit že $0 = x^2$). Můžeme tedy podělit výrazem xy^2, dostaneme

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}. \tag{3}$$

   Toto není lineární rovnice 1. řádu, nicméně máme Poznámku 2. Vidíme, že $\alpha = -2$, a tedy pomůže substituce $z = y^{1-\alpha} = y^3$. Nyní to buď zderivujeme rovnou ($z' = 3y^2y'$), nebo z toho nejprve vyjádříme y, tj. $y = \sqrt[3]{z}$ a následně zderivujeme: $y' = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}z'$. Následně dosadíme do rovnice (3), a po úpravě dostaneme

$$\cancel{y'}\, z' = \frac{3z}{x} + 3x.$$

   Následně již pokračujeme podle algoritmu z Poznámky 3. Označme $a(x) := \frac{3}{x}$ a $b(x) := 3x$. Dále spočtěme primitivní funkci k a, což je $A(x) = 3 \log x = \log(x^3)$. Řešení homogenní rovnice jsou tedy

$$z_0 = Ke^{\log(x^3)} = Kx^3.$$

   Dále pomocí variace konstanty hledáme partikulární řešení ve tvaru $z_p(x) = K(x)x^3$. Zderivujeme a dosadíme, nebo rovnou píšeme

$$K' = e^{-A(x)} b(x) = \frac{1}{x^3} 3x = \frac{3}{x^2}.$$

Tedy $K(x) = -\frac{3}{x}$. Po dosazení dostaneme všechny řešení pro z ve tvaru

$$z(x) = -3x^2 + Cx^3,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Zbývá vyjádřit y, a sice

$$y(x) = \sqrt[3]{-3x^2 + Cx^3}. \tag{4}$$

Zbývá si uvědomit, kde je toto řešením. Problémové jsou body, kde $z(x) = 0$ (protože třetí odmocnina nemá v nule vlastní derivaci). Tedy problémové jsou body 0 a $\frac{3}{C}$. V těchto bodech nemá y z (4) vlastní derivaci.

Tedy řešením je (4) na intervalech

$$(-\infty, 0),\ \left(0, \frac{3}{C}\right) \text{ a } \left(\frac{3}{C}, \infty\right)$$

pro $C > 0$,

$$\left(-\infty, \frac{3}{C}\right),\ \left(\frac{3}{C}, 0\right) \text{ a } (0, \infty)$$

pro $C < 0$ a

$$(-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty)$$

pro $C = 0$.

3. $y' + 2xy = 2xy^3$. Opět je třeba použít Poznámku 2 s $\alpha = 3$. Tedy použijeme substituci $z(x) = y^{1-\alpha} = y^{-2}$. Abychom to mohli provést, předpokládejme nejprve, že $y \neq 0$. Navíc si všimneme, že je-li y řešení, je řešením i $-y$. Tedy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y > 0$. (Změnou znaménka pak dostaneme všechna řešení která nejsou nikde nulová). Navíc si všimneme, že $y \equiv 0$ je singulárním řešením.

Zde je výhodnější nejprve vyjádřit y, tedy $y = \sqrt{\frac{1}{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$. (Předpokládáme, že $y > 0$.) Pak derivací dostaneme, že $y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z'$. Celkově po substituci dostaneme rovnici

$$-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' = 2xz^{-\frac{3}{2}} - 2xz^{-\frac{1}{2}},$$

což můžeme upravit na

$$z' = 4xz - 4x.$$

A na tuto rovnici již můžeme použít algoritmus z Poznámky 3. Volme $a(x) := 4x$ a $b(x) := -4x$. Pak primitivní funkce k a je $A(x) = 2x^2$. Tedy řešením homogenní rovnice je $z_0 = Ke^{2x^2}$.

Dále hledáme partikulární řešení pomocí variace konstanty ve tvaru $z_p = K(x)e^{2x^2}$, a víme že pak

$$K' = -e^{-x^2} 4x.$$

Pro integraci výrazu $-e^{-x^2}4x$ použijeme metodu „vidím derivaci“, tedy substituci $t = -x^2$. Pak $dt = -2x\,dx$, a tedy

$$\int -e^{-x^2} 4x \, dx = 2 \int e^t \, dt = 2e^t = 2e^{-x^2}.$$

Celkem máme partikulární řešení $z_p = 1$, a všechna řešení ve tvaru $z(x) = 1 + Ce^{2x^2}$. Potřebujeme $z > 0$ (budeme to chtít odmocňovat). Tedy odsud dostaneme podmínku pro C.

Dostaneme zpět

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{1 + Ce^{2x^2}}}.$$

Zjevně $y > 0$. Již víme, že pak máme i řešení s opačným znaménkem a řešení nulové. Lepit zde nemůžeme, neboť tato řešení na sebe nikde nenavazují.

Zbývá si ujasnit, kde jsou tato řešení definována. Řešení $y(x) = 0$ je definováno na $\mathbb{R}$. A řešení

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + Ce^{2x^2}}}.$$

jsou pro $C \geq 0$ definována na $\mathbb{R}$, a pro $-1 < C < 0$ jsou definována na intervalu $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{C}}, \sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{C}}\right)$. (Pro $C \leq -1$ nemáme žádné řešení.)

Pro řešení zbylých příkladů viz příští cvičení.