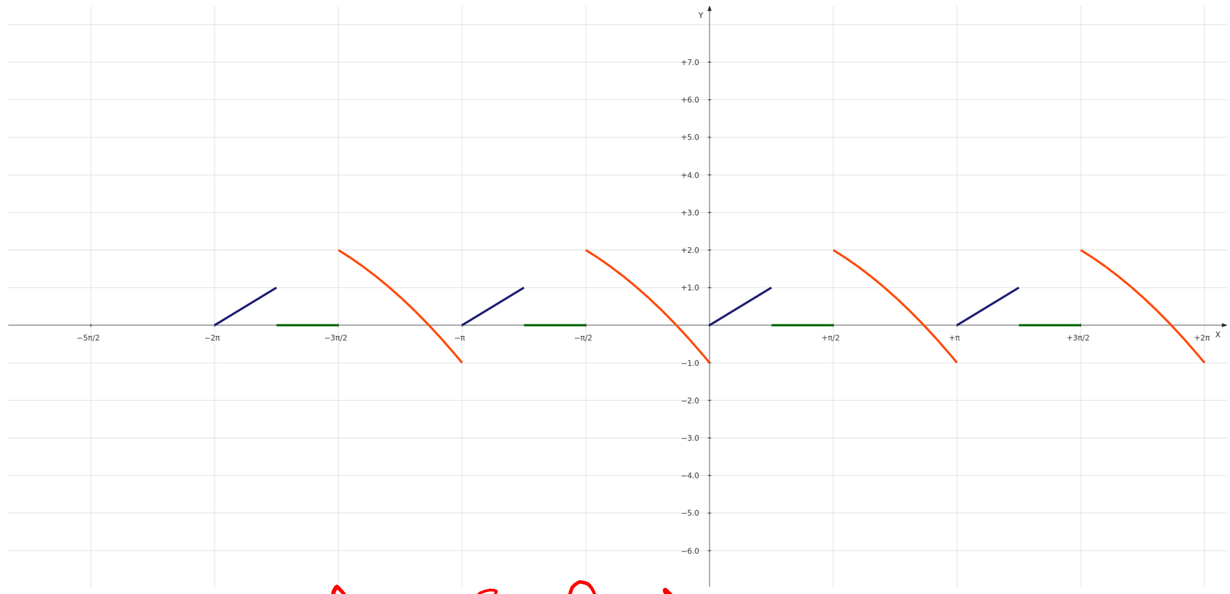
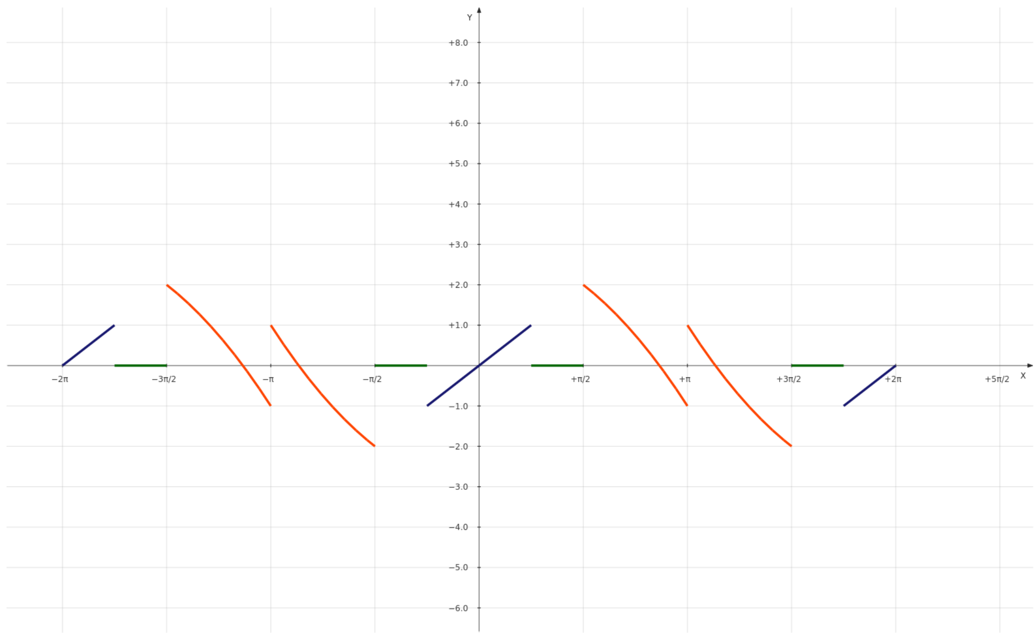
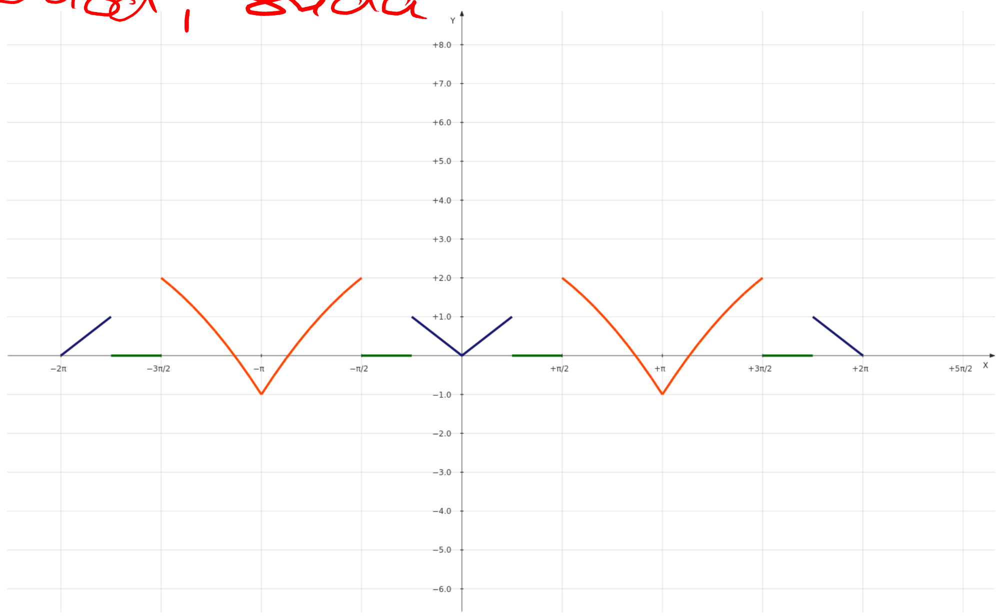
1 π-period



2π-period, lichá



2π-period, sudá



$$\left[f(x) = \tfrac{4}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 2x + \cdots\right) - 4\pi\left(\sin x + \tfrac{1}{2}\sin x + \cdots\right)\right]$$

$$\text{e)}\, f(x) = \begin{cases} a, & \text{v } (-0, t\rangle, \\ -a, & \text{v } (t, 2t\rangle. \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \tfrac{4a}{\pi}\left(\sin \tfrac{\pi}{t}x + \tfrac{1}{3}\sin \tfrac{3\pi}{t}x + \tfrac{1}{5}\sin \tfrac{5\pi}{t}x + \cdots\right)\right]$$

2a

Příklad 10.2. Rozviňte danou funkci v intervalu $(0, \pi)$ ve Fourierovu řadu sinovou a kosinovou

$$\text{a)}\, f(x) = x.$$

Řešení. Nejprve provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu sinovou. Pro pomocnou funkci $F(x)$ platí

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi\rangle, \\ -(-x) = x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

$\xi \in BV$ $([0, \pi])$

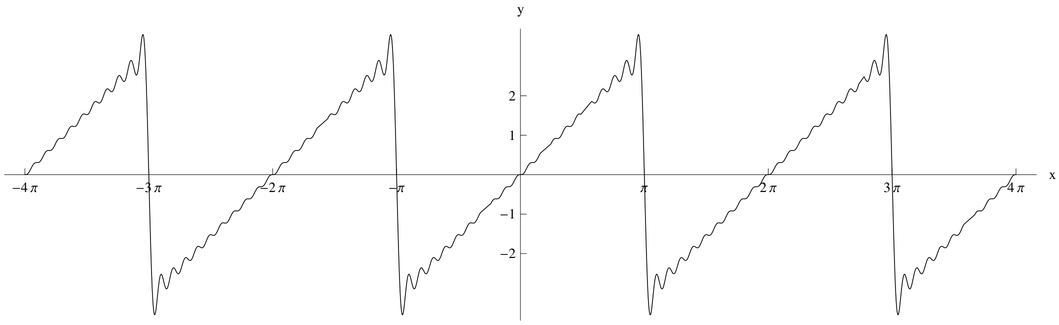
Výpočtem dostáváme Fourierovy koeficienty

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\, dx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + 0 + 0 - 0\right) = \\ &= -\frac{2}{n}(-1)^n. \end{aligned}$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = -1,\ b_3 = \frac{2}{3},\ \ldots$$

Rozvoj v sinovou řadu je tedy

$$f(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \cdots, \text{pro } x \in (0, \pi\rangle.$$



Obr. 5. Liché periodické rozšíření funkce $x, x \in (0, \pi\rangle$

Nyní provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu kosinovou. Pomocná funkce je ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi\rangle, \\ -x, & x \in (-\pi, 0\rangle. \end{cases}$$

Pro Fourierovy koeficienty platí

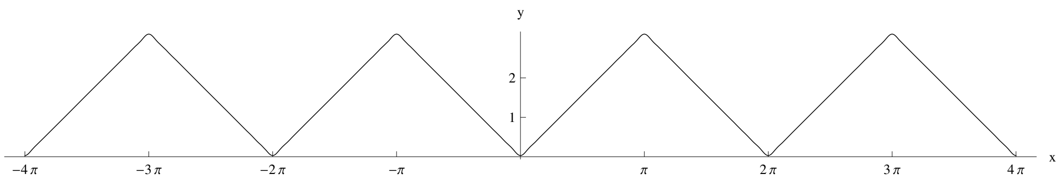
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{n^2} \cos n\pi - 0 - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} \left[(-1)^n - 1 \right]. \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}, \; a_2 = 0, \; a_3 = -\frac{4}{9\pi}, \; \ldots$$

Po dosazení dostáváme Fourierovu řadu kosinovou

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x + \cdots, \text{pro } x \in \langle 0, \pi\rangle.$$



Obr. 6. Sudé periodické rozšíření funkce $x, x \in \langle 0, \pi\rangle$

2.3)

Příklad 5.1.4. *Určete Fourierovu řadu sudého pokračování funkce $f(x) = e^x$ definované na intervalu $[0, \pi]$.*

Řešení: Tato úloha se týká poznámky 4.1.5, podle které je zřejmé, že hledáme rozvoj funkce f v kosinovou řadu. Jedná se o sudou funkci, tudíž

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \, dx = \frac{2}{\pi}(e^\pi - 1), \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx \, dx \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dvojí aplikací metody per partes u výrazu a_n obdržíme

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(e^\pi(-1)^n - 1) - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2} \int_0^\pi e^x \cos nx \, dx.$$

Nyní můžeme řešit následující rovnici

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx \, dx (1 + \frac{1}{n^2}) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(e^\pi(-1)^n - 1).$$

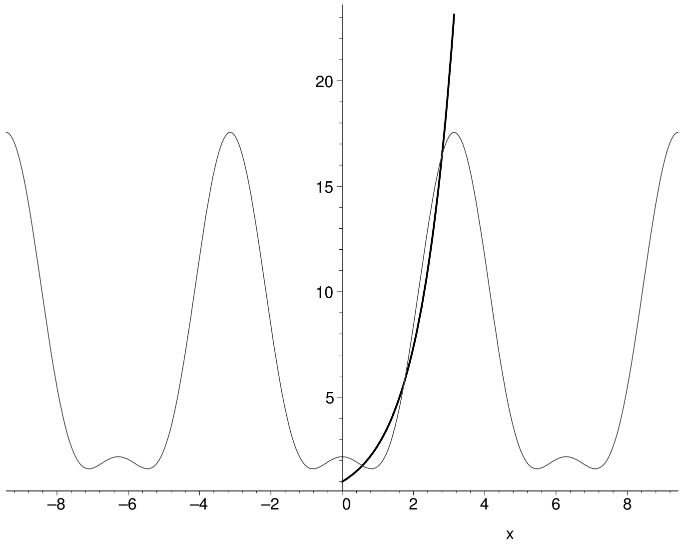
Rovnici vydělíme výrazem $\frac{n^2+1}{n^2}$ a obdržíme

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2+1}(e^\pi(-1)^n - 1) \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

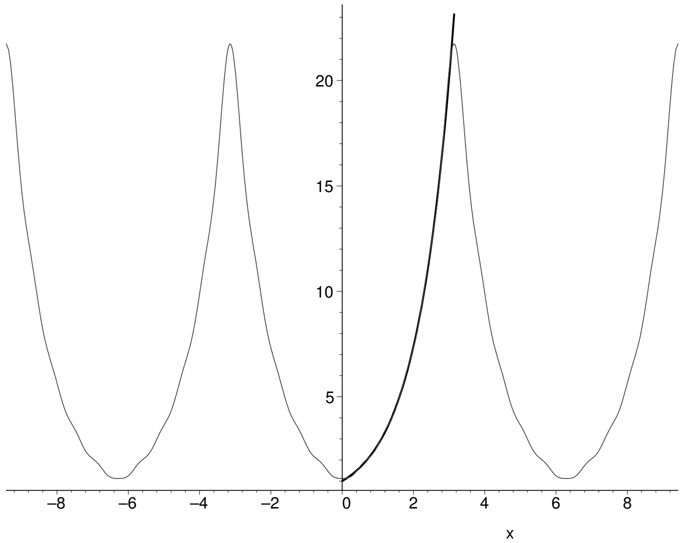
Tedy pro x z intervalu $[0, \pi]$ a jeho sudé pokračování platí

$$e^x = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^\pi(-1)^n - 1}{n^2 + 1} \cos nx.$$

ta sudá funkce je [illegible] V([0, 2π])



Obr.5a: Graf $f(x) = e^x$ na int. $[0, \pi]$ a jejího sudého pokračování, pro n=2



Obr.5b: Graf $f(x) = e^x$ na int. $[0, \pi]$ a jejího sudého pokračování, pro n=10

(20)

součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Položme

EBV [2012S]

$$g(x) = |\sin x|\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce g ke g stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Spočtěme koeficienty této Fourieorovy řady. Jelikož je g sudá, jsou členy $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dále máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\sin x \sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\left[-\cos x \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin x \frac{\cos nx}{n} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n^2}a_n. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ liché}, \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Tedy

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ pak dostáváme

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

♣

16.7.5. Příklad. Pro $a > 0$ rozviňte funkci

(21)

$$f(x) = \cos ax, \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy se $\sin nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}.$$

Řešení. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \cos ax, & x \in (0,\pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \\ -\cos ax, & x \in (-\pi, 0) + 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak g je lichá funkce s konečnou variací, a tedy její Fourierova řada konverguje ke g.

Při výpočtu jejích koeficentů máme $a_n = 0$ díky lichosti g a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{a} \sin nx \sin ax \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{n}{a} \cos nx \sin ax \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{2n}{\pi a} \int_0^{\pi} \cos nx \sin ax \\ &= \frac{-2n}{\pi a} \left[\frac{-1}{a} \cos nx \cos ax \right]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi a} \int_0^{\pi} \frac{n}{a} \sin nx \cos ax \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2n}{\pi a^2} \left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1 \right] + \frac{n^2}{a^2} b_n. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $a \notin \mathbb{N}$. Pak z předchozího plyne

$$b_n = \frac{2n}{\pi(a^2 - n^2)} \left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1 \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $a = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2kx = 0.$$

Tedy Fourierova řada g má tvar

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n \neq a}^{\infty} \frac{n}{a^2 - n^2} \left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1 \right] \sin nx.$$

Nyní uvažujme $a = 2$ a $x = \frac{\pi}{2}$, pak máme

$$
\begin{aligned}
-1 = \cos\pi &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1,n\neq 2}^{\infty}[(-1)^n - 1]\sin n\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)(-1)^k(2k+1)}{4-(2k+1)^2} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4}.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4} = -\frac{\pi}{4}.$$

♣

2C

16.7.6. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin 3x), \qquad x \in [0,\pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Řešení. Uvažujme sudé 2π-periodické rozšíření f na R, tj. funkci

$$
g(x) = \begin{cases}
1, & x \in \left((-\pi, -\frac{2}{3}\pi) \cup (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\
0, & x = \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}, \\
-1, & x \in \left((-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi)\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{cases}
$$

Dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada g k funkci

3D

$$
h(x) = \begin{cases}
1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\
g(x), & \text{jinak.}
\end{cases}
$$

Spočtěme koeficienty této řady. Jelikož je g sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

a

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos nx\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{4}{\pi n}\left(\sin(\frac{n\pi}{3}) - \sin(\frac{2n\pi}{3})\right).
\end{aligned}
$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k+1, 6k+3, 6k+5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$1 = h(x) = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

♣

16.7.7. Příklad. Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]} \in ¶([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty **??** platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Řešení: Na intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ jsou části integrálů pro koeficienty a_n, b_n nulové.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(1+n)x - \sin(1-n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)$$

Pro $n > 1$ platí:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(1-n)x - \cos(1+n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi} = 0$$

Koeficient b_1 musíme spočítat odděleně: :

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1 - \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

Fourierova řada má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)\cos nx =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

Podle Dirichletovy věty je součet této řady roven $f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

(28)

Příklad 6. Rozložte v kosinovou Fourierovu řadu funkci:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ -\cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Protože rozkládáme v kosinovou řadu, jsou všechny koeficienty b_n nulové.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$$

sudá ~~zopie~~ 8 3V(Z0,2π])

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx \, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(1+n)x +$$

$$+ \cos(1-n)x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(1+n)x + \cos(1-n)x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } n \text{ liché} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k+2 \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k \end{cases}$$

Tento zápis lze sjednotit do jediného:

$$a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{1}{1-n^2}$$

Pak tedy, protože funkce je spojitá, platí podle Dirichletovy věty na celém intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{\cos nx}{1-n^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1-n^2}$$

2g

Příklad 7. Rozložte v sinovou Fourierovu řadu funkci $f(x) = \cos 2x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení:

Protože rozkládáme v sinovu řadu, všechny koeficienty a_n jsou nulové.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2+n)x + \sin(n-2)x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n+2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((-1)^{n+1} + 1\right)\frac{n+2+n-2}{n^2-4} = \frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2-4}$$

Protože funkce je spojitá, podle Dirichletovy věty platí na celém intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

Lichá zápis je 3u(20,2013)

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 4x \, dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\left((-1)^{n+1}+1\right)\sin nx}{n^2-4} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}\sin(2n+1)x$$

Příklad 8. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(\pi + x) & x \in (-\pi, 0) \\ \dfrac{1}{2}(\pi - x) & x \in \langle 0, \pi) \,. \end{cases}$$

Řešení:

Jde o lichou funkci, tedy všechny její koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi x \sin nx \,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \text{použiji metodu per partes} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}$$

Podle Dirichletovy věty řada konverguje pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$ kromě $x = 0$ k zadané funkci:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Příklad 9. Funkci $f(x) = \pi^2 - x^2$ rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Najděte součty řad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Řešení:

Jde o sudou funkci, tedy všechny její koeficienty b_n jsou rovny nule. Spočtu koeficienty a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[x\pi^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$\text{d)}\, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

Řešení. Pro jednotlivé koeficienty Fourierovy řady platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\Big[x\Big]_0^{\pi} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos nx\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos nx\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin nx\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \sin nx\, dx\right) = \frac{1}{n\pi}\Big[-\cos nx\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi},\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{2}{3\pi},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{2}{5\pi},\ \dots$$

Fourierův rozvoj zadané periodické funkce je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \cdots$$

(30)

$$\text{e)}\, f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle.$$ $\in BV\langle 0,\pi\rangle$

Řešení. Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos 2nx\, dx$$

Pro výpočet použijeme vzorec $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right]$

// pozor na periodu

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big[\sin(1-2n)x+\sin(1+2n)x\big]\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)x-\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)x\right]_0^{\pi} = \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1-2n)\pi}{1-2n}+\frac{\cos(1+2n)\pi}{1+2n}-\frac{1}{1-2n}-\frac{1}{1+2n}\right] = \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1-1}{1-2n}+\frac{-1-1}{1+2n}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n}+\frac{1}{1+2n}\right) = \\
&= \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}.
\end{aligned}
$$

$$a_1 = -\frac{4}{3\pi},\ a_2 = -\frac{4}{15\pi},\ a_3 = -\frac{4}{35\pi},\ \ldots$$

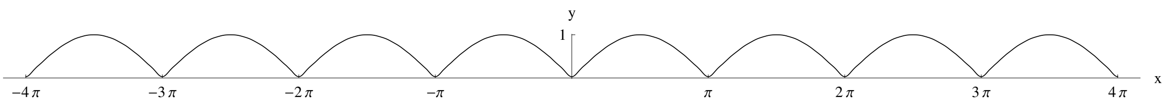
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin 2nx\,dx$$

Použijeme vzorec $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big[\cos(1-2n)x-\cos(1+2n)x\big]\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-2n}\sin(1-2n)x-\frac{1}{1+2n}\sin(1+2n)x\right]_0^{\pi} = 0.
\end{aligned}
$$

Fourierův rozvoj dané funkce je

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx) = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{3\pi}\cos 2x-\frac{4}{15\pi}\cos 4x-\frac{4}{35\pi}\cos 6x+\cdots$$



Obr. 4. Periodické rozšíření funkce $\sin x, x\in\langle 0,\pi\rangle$

(3b)

f) $f(x) = \dfrac{x}{2},\quad x\in\langle -t,t\rangle.$ $\in BV([-t,t])$

Řešení. Daná funkce je lichá na intervalu $\langle -t,t\rangle$, a proto její koeficienty jsou

$$a_0 = 0,\quad a_n = 0,$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{t}\int_{-t}^{t}\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi}{t}x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \sin\frac{n\pi}{t}x & u = -\frac{t}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{2t}\left(\left[-\frac{xt}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x\right]_{-t}^{t} + \frac{t}{n\pi}\int_{-t}^{t}\cos\frac{n\pi}{t}x\,dx\right) = \\
&= \frac{1}{2t}\left[-\frac{xt}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{t}x\right]_{-t}^{t} = \\
&= \frac{1}{2t}\left(-\frac{t^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi - \frac{t^2}{n\pi}\cos(-n\pi) - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin(-n\pi)\right) = \\
&= \frac{1}{2t}\left(-\frac{t^2}{n\pi}(-1)^n - \frac{t^2}{n\pi}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^n}{2t}\left(-\frac{2t^2}{n\pi}\right) = -\underline{\frac{(-1)^n t}{n\pi}}.
\end{aligned}
$$

$$b_1 = \frac{t}{\pi},\ b_2 = -\frac{t}{2\pi},\ b_3 = \frac{t}{3\pi},\ \dots$$

Výsledný Fourierův rozvoj funkce je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{t} = \frac{t}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{t} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{t} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{t} + \cdots\right).$$

Cvičení 10.1. Rozviňte ve Fourierovu řadu v daném základním intervalu periodicity funkci

$$\text{a)} f(x) = x \quad \text{v } \langle -\pi, \pi\rangle$$

$$\left[f(x) = 2\left(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right)\right]$$

$$\text{b)} f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{v } (-\pi, 0), \\ x, & \text{v } (0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[f(x) = -\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2}{\pi}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 3x + \tfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right) + 3\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x - \tfrac{3}{5}\sin 3x + \cdots\right]$$

$$\text{c)} f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{v } \langle 0, \pi\rangle, \\ 0, & \text{v } \langle \pi, 2\pi\rangle. \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \tfrac{1}{\pi} + \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \tfrac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \tfrac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right)\right]$$

$$\text{d)} f(x) = x^2 \quad \text{v } (0, 2\pi)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt\,,\ \ k \geq 1\,.$$

Typická úloha, která se v souvislosti s Fourierovými řadami vyskytuje, je nalézt pro nějakou funkci f na intervalu $\langle 0, T)$ její Fourierovu řadu a určit, jaký je její skutečný součet (tj. jak moc dobře řada původní funkci reprezentuje). Protože Fourierova řada je definována pro periodické funkce můžeme tuto úlohu vyřešit třemi různými způsoby:

1. prodloužit funkci f na T-periodickou. Potom dostaneme Fourierovu řadu, které může obsahovat jak členy se sinem tak i kosinem.
2. prodloužit funkci f na lichou $2T$-periodickou. Potom dostaneme tzv. sinovou Fourierovu řadu, která obsahuje jen členy se sinem.
3. prodloužit funkci f na sudou $2T$-periodickou. Potom dostaneme tzv. kosinovou Fourierovu řadu, která obsahuje jen členy s kosinem.

Pokud bychom v bodech 2 a 3 přímo počítali koeficienty a_k a b_k pomocí definice Fourierovy řady, museli bychom integrovat přes interval dlouhý $2T$. Nicméně díky jisté symetrii, kterou liché a sudé funkce splňují, lze ukázat, že koeficienty lze v těchto případech spočítat jednodušeji. Konkrétně pro sinovou řadu platí $a_k = 0$ a

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt\,,$$

kde tentokrát $\omega = \frac{\pi}{T}$. Pro kosinovou máme naopak $b_k = 0$ a

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt\,,\ \text{kde } \omega = \frac{\pi}{T}\,.$$

Ukážeme si nyní na konkrétních příkladech, jak se tato úloha řeší. V každém příkladu ukážeme všechny tři možné řešení z výše uvedených bodů.

(3c) **Příklad 3** *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, 2); \\ 2, & t \in \langle 2, 4). \end{cases}$$

BV na $[0, 4]$

Fourierova řada:

Perioda funkce $f(t)$ je tedy $T = 4$. To znamená, že $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Spočteme koeficienty a_k. Pro $k = 0$ máme:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\,dt = 2\,.$$

Pro $k \geq 1$ dostaneme:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\big(k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \Big[\frac{1}{k\frac{\pi}{2}}\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4 = 0\,.$$

Poslední rovnost plyne z faktu, že $\sin(2k\pi) = \sin(k\pi) = 0$ pro všechny k.

Dále spočítáme koeficienty b_k, $k \geq 1$:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\big(k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \Big[-\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4 = -\frac{2}{k\pi}(\cos(2k\pi) - \cos(k\pi))\,.$$

Protože $\cos(2k\pi) = 1$ a $\cos(k\pi) = (-1)^k$, dostaneme nakonec

$$b_k = -\frac{2}{k\pi}[1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé;} \\ -\frac{4}{k\pi}, & k \text{ liché.} \end{cases}$$

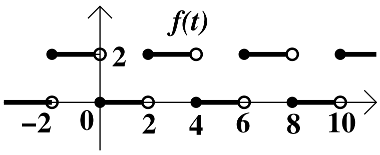
Fourierova řada pro danou funkci tedy je:

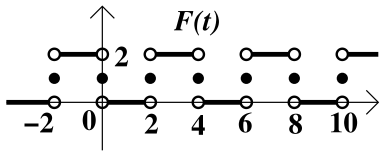
$$f \sim \frac{2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(0 \cdot \cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big) + \frac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1]\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\Big) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1]\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)$$

Jelikož všechny sudé členy vyskytující se v poslední řadě jsou nulové, lze poslední výraz ještě upravit tak, že sčítací index k nahradíme výrazem $2k+1$ a za b_k dosadíme jeho hodnoty pro lichá k:

$$f \sim 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\big((2k+1)\frac{\pi}{2}t\big)$$

Dále máme určit součet nalezené Fourierovy řady. Nakreslíme si periodické prodloužení f (vlevo), a pak si vzpomeneme na Jordanovo kritérium. Tam, kde je f spojitá, je součet řady roven f. Tam, kde je bod nespojitosti, konverguje řada k průměru $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$ (součet vpravo).





Formulí lze součet vyjádřit takto:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in (4k, 4k+2); \\ 2, & t \in (4k+2, 4k+4); \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}\,. \\ 1, & t = 2k \end{cases}$$

Všiměte si následující věci: „normální“ Fourierka je „skoro sinová“, proč? Protože podle obrázku vidíme, že periodické prodlužení f je vlastně ve tvaru 1+„lichá funkce“, proto také odpovídající řada je ve tvaru 1+„sinová“.

sinová Fourierova:

V tomto případě máme opět $T = 4$. Nicméně $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Protože budeme počítat sinovou řady víme, že koeficienty u kosinů $a_k = 0$. Spočtěme nyní koeficienty b_k:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\sin\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\,dt = \Big[-\frac{4}{k\pi}\cos\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\Big]_2^4 = -\frac{4}{k\pi}\big[\cos(k\pi) - \cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)\big]\,.$$

Jelikož $\cos(k\pi) = (-1)^k$ a

$$\cos(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 4n\,, \\ 0 & \text{pro } k = 4n \pm 1\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \\ -1 & \text{pro } k = 4n+2\,, \end{cases}$$

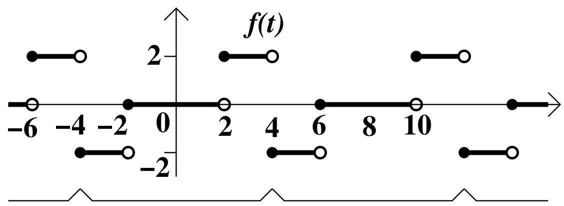
můžeme přepsat poslední výraz pro b_k takto:

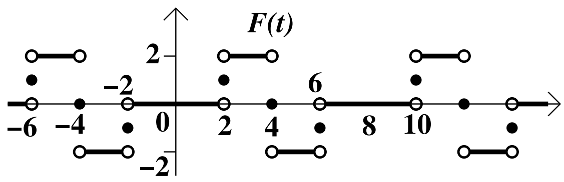
$$b_k = -\frac{4}{k\pi}\big[(-1)^k - \cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)\big] = \begin{cases} 0, & k = 4n\,, \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 4n \pm 1\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \\ -\frac{8}{k\pi}, & k = 4n+2\,. \end{cases}$$

Poslední výraz není příliš hezký, takže ho výsledného zápisu řady raději nepoužijeme. Dostáváme tedy:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}\big[\cos\big(k\frac{\pi}{2}\big) - (-1)^k\big]\sin\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\,.$$

Dále určíme součet sinové řady. Nejprve nakreslíme **liché** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -4, 4)$ (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.





kosinová Fourierova:

Nakonec najdeme kosinovou řadu. Máme tedy $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Koeficienty u sinů $b_k = 0$. Pro koeficienty u kosinů máme:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\,dt = 2\,,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\cos\big(k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\cos\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\,dt = \Big[\frac{4}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\Big]_2^4 = \frac{4}{k\pi}\big[\sin(k\pi) - \sin\big(k\frac{\pi}{2}\big)\big]\,.$$

Jelikož $\sin(k\pi) = 0$ dostáváme:

$$a_k = -\frac{4}{k\pi}\sin(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & k = 4n\,,\ k = 4n+2\,,\\ -\frac{4}{k\pi}, & k = 4n+1\,,\\ \frac{4}{k\pi}, & k = 4n+3\,. \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

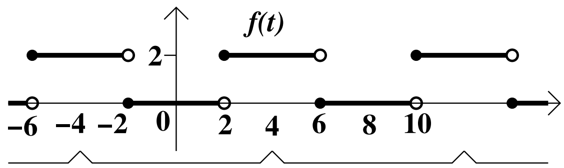
Proto

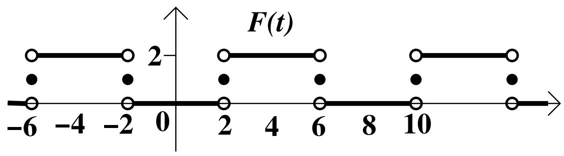
$$f \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}\big)\cos\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\,.$$

Všiměte si, že koeficienty a_k se rovnají 0 pro sudá k a $\frac{4}{k\pi}$ nebo $-\frac{4}{k\pi}$ pro lichá. Pokud tedy nahradíme sčítací index ve výsledné řadě výrazem $2k+1$, lze výsledek napsat takto:

$$f \sim 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{(2k+1)\pi}\cos\big((2k+1)\frac{\pi}{4}t\big)\,.$$

Nakonec určíme součet kosinové řady. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -4, 4)$ (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.





Příklad 4 *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = 1 - t\,,\ t \in \langle 0, 2)\,.$$

Fourierova řada:

Pro funkci f máme $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Spočítáme koeficienty a_k a b_k.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\,dt = 0\,.$$

Následující integrály budeme počítat pomocí metody per partes.

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\cos(k\pi t)\,dt = \left|\begin{matrix} u = 1-t & v' = \cos(k\pi t)\\ u' = -1 & v = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\end{matrix}\right| = \Big[(1-t)\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\Big]_0^2 + \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \sin(k\pi t)\,dt\,.$$

4a

4. [8b] Mějme $f(x) = |\cos\frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

   2. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

   3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá a na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ se rovná funkci $\cos\frac{x}{2}$. Proto

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}\,,$$

a (v první rovnosti využijeme $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \cos x\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1}\sin x\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \frac{2}{2n-1}\sin x\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\right]_0^\pi = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2n+1}\underbrace{\sin\pi\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^n} + \frac{2}{2n-1}\underbrace{\sin\pi\Big(n-\tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^{n+1}}\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{(-2)}{4n^2-1} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech", a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Dosazení bodu $x = \pi$ dává

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}(-1)^n\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$) dává:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

4,5

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.
   1. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.
   2. Spočtěte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sama o sobě lichá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, není proto nutno ji nijak modifikovat. Z lichosti dostáváme

$$a_0 = a_n = 0\,, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sinh ax \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx\,,$$

s využitím vlastností komplexní exponenciely. Spočtěme nejprve

$$\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{a+in}\left(e^{a\pi}\, e^{in\pi} - 1\right) = \frac{a-in}{a^2+n^2}\left(e^{a\pi}\,(-1)^n - 1\right)\,,$$

tedy

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{a\pi}\right)\,.$$

Pouhou záměnou $(-a)$ za a dostaneme

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{-ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{-a\pi}\right)\,,$$

a tedy

$$b_n = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{a^2+n^2}\left[1 - 1 + (-1)^{n+1}(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\right] = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi\,\frac{(-1)^{n+1} n}{a^2+n^2}\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2+n^2}\sin nx\,,$$

a protože zperiodizovaná $\sinh ax$ (označme ji $\tilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{\tilde{f}(x+)+\tilde{f}(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^\infty b_n^2$) dává:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\sinh a\pi\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}\,. \tag{2}$$

Protože (spočtěte si) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)$, $(a \neq 0\,!)$ dostaneme konečně:[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\sinh^2 a\pi}\left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)\,, \quad a \neq 0\,. \tag{3}$$

[2]Pro $a = 0$ dává Parsevalova rovnost (2) triviální identitu $0 = 0$, ale zkuste si ve vztahu (3) spočítat na obou stranách $\lim_{a\to 0}$. Co dostanete? Je to správně? A uměli byste odůvodnit, že limitní přechod uvnitř nekonečného součtu je korektní? :-)

(4c)

4. [7b] Mějme $f(x) = \cos 3x$ na $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6} \rangle$ a $\langle \frac{\pi}{6}, \pi \rangle$ a dále periodicky s periodou 2π.
   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   2. Napište Parsevalovu rovnost a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte přislušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \left[\frac{2}{3\pi} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3\pi} \,,$$

a dále

$$\pi a_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos(3{+}n)x + \cos(3{-}n)x \big) \, dx \,.$$

Je vidět, že výpočet bude vypadat jinak pro $n = 3$ a jinak pro $n \neq 3$. Pro $n = 3$ máme

$$\pi a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos 6x + 1 \big) \, dx = \frac{1}{6} \Big[\sin 6x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \,,$$

zatímco pro $n \neq 3$ je

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \frac{1}{3{+}n} \Big[\sin(3{+}n)x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3{-}n} \Big[\sin(3{-}n)x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{1}{3{+}n} \sin(3{+}n)\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3{-}n} \sin(3{-}n)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3{+}n} \cos n\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3{-}n} \cos n\frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{6}{\pi(9 - n^2)} \cos n\frac{\pi}{6} \,. \end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6} \, \cos nx}{9 - n^2} \,,$$

a protože zadaná funkce je po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{9\pi^2} + \frac{1}{36} + \frac{36}{\pi^2} \sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9 - n^2)^2} \,,$$

případně:

$$\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9 - n^2)^2} = \frac{5\pi^2}{1296} - \frac{1}{162} \,.$$

(4d)

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Ze sudosti dostáváme

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

a dále

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce (označme ji $\widetilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$F_f(x) = \frac{\widetilde{f}(x+) + \widetilde{f}(x-)}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Při dosazení bodu $x = \frac{\pi}{2}$ do (3) tedy na pravé straně rovnosti dostaneme $\frac{\pi}{4}$, načež dostaneme

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Protože $\sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}\sin\pi n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

což je jedna z možných forem výsledku. Je však možno si ještě uvědomit, že výraz $\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}$ je nenulový pouze pro $n = 4k + 2$, a pak má hodnotu 2, tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(4k+2)^2} = \frac{\pi^2}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

což je jednodušší a přehlednější forma výsledku.

$$= -\frac{1}{2}\sin\,x + \frac{1}{2}\sin\,5x$$

V tomto případě $b_1 = -\frac{1}{2}, b_5 = \frac{1}{2}$ a ostaní koeficienty jsou nulové.

(b)

$$\cos^4\,x = \left(\text{použiji vztah }\cos^2\,\alpha = \frac{1+\cos\,2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos\,2x}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos\,2x + \cos^2\,2x\right) = \left(\text{použiji stejný vztah pro }\cos^2 2x\right) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\,2x + \frac{1\,+\,\cos\,4x}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos\,2x + \frac{1}{8}\cos\,4x$$

V tomto případě $a_0 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{8}$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

U tohoto příkladu vidíme, že ne vždy je třeba počítat Fourierovy koeficienty přes integrály. Pokud mám součet, součin či mocninu goniometrických funkcí, je někdy možné použitím vztahů, které pro ně platí, převést funkci na lineární kombinaci funkcí $\cos\,nx, \sin\,nx$. Získáme tak vlastně Fourierovu řadu dané funkce s konečným počtem nenulových koeficientů.

5

Příklad 2. Pomocí koeficientů a_n, b_n Fourierovy řady 2π-periodické funkce $y = f(x)$ vyjádřete koeficienty a'_n, b'_n posunuté funkce $y = g(x) = f(x+h)$, kde $h > 0$ je kladná konstanta.

Řešení:

Původní funkce je $y = f(x)$, její koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos\,nx\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin\,nx\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $y = f(x+h)$ má koeficienty

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\,\cos\,nx\,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\cos(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro kosinus rozdílu})$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$

(nyní využiji toho, že platí: $\displaystyle\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\pi+h} - \int_{-\pi}^{-\pi+h} = \int_{-\pi}^{-\pi}$,

protože z toho důvodu, že funkce má periodu 2π, mají druhý

a třetí člen opačnou velikost, takže se odečtou)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$

$$= a_n\,\cos\,nh + b_n\,\sin\,nh$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\,\sin\,nx\,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\sin(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro sinus rozdílu})$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$

(upravím meze jako u koeficientů a_n :)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$

$$= b_n\cos\,nh - a_n\,\sin\,nh$$

6 **Příklad 3.** Nechť $y = f(x)$ je funkce integrovatelná na $\langle -\pi, \pi\rangle$. Dokažte, že pro koeficienty a_k, b_k Fourierovy řady funkce f platí:

(a) Je-li f periodická s periodou π, tj. $f(x) = f(x+\pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(b) Je-li f tzv. antiperiodická s antiperiodou π, tj. $f(x+\pi) = -f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Řešení:

6a

(a)

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos{(2k-1)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro kosinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\cos{(2k-1)x}\,\cos{(2k-1)\pi}\right.$$
$$\left.-\sin{(2k-1)x}\,\sin{(2k-1)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin{(2k-1)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro sinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\sin{(2k-1)x}\,\cos{(2k-1)\pi}\right.$$
$$\left.+\cos{(2k-1)x}\,\sin{(2k-1)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = 0$$

(b)

65

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x\, + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci} \\
&x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos{(2k)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x\, + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro kosinus součtu a} \\
&\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\cos{(2k)x}\ \cos{(2k)\pi}\right. \\
&\left. +\sin{(2k)x}\ \sin{(2k)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{2k} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x\, + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci} \\
&x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin{(2k)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x\, + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro sinus součtu a} \\
&\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\sin{(2k)x}\ \cos{(2k)\pi}\right. \\
&\left. +\cos{(2k)x}\ \sin{(2k)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

Příklad 4. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Pro která x nalezená řada konverguje a jaký je její součet? Pomocí výsledku určete součet nekonečné řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$