

7. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Parciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Definice 2. Derivace (totální diferenciál)

Nechť je dána reálná funkce n -proměnných $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Pokud existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

potom toto lineární zobrazení L značíme $df(a)$ nebo také $f'(a)$ a nazýváme jej **derivací** nebo také **totálním diferenciálem** funkce f v bodě a . Zobrazení, které bodu a přiřazuje $df(a)$, resp. $f'(a)$, značíme df , resp. f' a nazýváme jej diferenciálem funkce f .

Věta 3. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má totální diferenciál $df(a)$ v bodě a . Potom $df(a)$ je lineární zobrazení, které vektoru $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje číslo $df(a)(h)$ a platí, že

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i.$$

Věta 4. Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě a . Potom funkce f má v bodě a totální diferenciál určený předpisem

$$df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} dx_i.$$

Definice 5. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Pak graf funkce

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Věta 6. Nechť je funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0; y_0]$. Pak v bodě $[x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$ existuje tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Hinty

$$\begin{aligned}2|xy| &\leq x^2 + y^2 \\ \max\{|x|, |y|\} &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|\end{aligned}$$

Algoritmus - Totální diferenciál $f(x, y)$

1. Určíme definiční obor $f(x, y)$.
2. Spočteme parciální derivace mechanicky i podle definice (jako předminule) všude, kde to jde (nebo v bodě, na který jsme tázáni).
3. Spočteme totální diferenciál.
 - (a) Jestliže má funkce v daném bodě spojité parciální derivace, pak je totální diferenciál dán předpisem z Věty 4.
 - (b) Jestliže funkce má parciální derivace (ale nejsou spojité nebo nevíme, zda jsou spojité), dopočítáme totální diferenciál z definice - kandidátem jsou pak parciální derivace.
 - (c) Jestliže funkce někde není spojitá nebo dokonce definovaná, totální diferenciál tam funkce nemá.
 - (d) Jestliže parciální derivace v nějakém bodě neexistují nebo nejsou vlastní, totální diferenciál tam funkce nemá.

Příklady

1. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí
 - (a) $x^2 - 2xy - 3y^2$
 - (b) $\arctan \frac{x-y}{x+y}$
 - (c) $xy \ln(x+y)$
2. Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0, 0)$:
 - (a) $|y| \sin x$
 - (b) $\cos \sqrt[3]{xy}$
 - (c) $\sqrt{|x|^3 + |y|^3}$
 - (d) $\sqrt[3]{xy}$
 - (e) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
3. Dodefinujte funkci $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

4. Dodefinujte funkci $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.
5. Lze dodefinovat funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech?
6. Ověřte z definice totální diferenciál funkce $x^2 + y^2$ v bodě $[x_0, y_0]$.