

## 11. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, [kunck6am@natur.cuni.cz](mailto:kunck6am@natur.cuni.cz)

## 1 Implicitní funkce

## Teorie

**Věta 1.** Necht'  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Necht'  $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$  je otevřená množina,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$  a necht' platí:

1.  $F \in C^k(G)$
2.  $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
- 3.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí bodu  $U \subset \mathbb{R}^n$  bodu  $\bar{x}$  a okolí  $V \subset \mathbb{R}^m$  bodu  $\bar{y}$  tak, že  $U \times V \subset G$  a pro každé  $x \in U$  existuje právě jedno  $y \in V$  s vlastností  $F(x, y) = 0$ . Označíme-li toto  $y$  symbolem  $\varphi(x)$ , pak pak  $\varphi \in C^k(U)$ .

## Příklady

1. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} e^{u/x} \cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{u/x} \sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu  $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$  funkce  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  třídy  $C^\infty$ . Spočítejte parciální derivace  $\frac{\partial u}{\partial x}$  a  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

2. Ukažte, že existují funkce  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  definované na nějakém okolí  $U$  bodu  $[1, 2]$ , které jsou na  $U$  třídí  $C^1$ , splňují  $u(1, 2) = 0$ ,  $v(1, 2) = 0$  a platí pro ně rovnice

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x. \end{aligned}$$

Spočítejte  $u'(1, 2)$  a  $v'(1, 2)$ .

3. Dokažte, že existují funkce  $z(x, y)$  a  $t(x, y)$ , které jsou třídy  $C^\infty$  na nějakém okolí  $U$  obsahujícím  $[1, -1]$  a splňují rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\x + y + z - t - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Spočtěte  $z''(1, -1)$ .

4. Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned}x &= u + v^2 \\y &= u^2 - v^3\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[3, 3]$  funkce  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  třídy  $C^\infty$ , které splňují  $u(3, 3) = 2$ ,  $v(3, 3) = 1$ . Spočtěte  $z_{xy}(3, 3)$ , pokud  $z = 2uv$ .

5. Spočtěte  $x_v$ ,  $y_v$  a  $z_v$ , pokud

$$\begin{aligned}u &= x^2 + y^2, \\v &= x^2 - 2xy^2, \\z &= \ln(y^2 - x^2)\end{aligned}$$

v bodě  $u = 5$ ,  $v = -7$ ,  $x(5, -7) = 1$  a  $y(5, -7) = 2$ .

(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích,  $z_v$  pak vyjádřete řetízkovým pravidlem.)

### Zkouškové příklady

6. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(xy) + \cos v \\v &= e^{x-u} - y^2 - v\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$  hladké funkce  $x, y$  proměnných  $u, v$  takové, že  $x(1, 0) = 1$  a  $y(1, 0) = 1$ . Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce  $y(u, v)$  v bodě  $[1, 0]$  a pokud ano, nalezněte jej.

7. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(x^2 + y^2) - 2xy \\v &= e^x \sin y + \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$  hladké funkce  $x, y$  proměnných  $u, v$  takové, že  $x(0, 1) = 1$  a  $y(0, 1) = 0$ . Nechť navíc je  $z$  funkce proměnných  $x$  a  $y$  definovaná na okolí bodu  $[x, y] = [1, 0]$  předpisem  $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  a nechť  $\Phi$  je funkce proměnných  $u$  a  $v$  definovaná na okolí bodu  $[u, v] = [0, 1]$  předpisem  $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$ . Spočtěte  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$ .

## 2 Lokální extrémy

### Teorie

**Věta 2** (Nutná podmínka existence extrému). Nechť  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $a \in G$  a  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nechť funkce  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $a$  lokální extrém. Potom buď  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  neexistuje nebo  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ .

**Věta 3** (Postačující podmínky pro lokální extrém). Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $a \in G$  a necht'  $f \in C^2(G)$ . Necht'  $\text{grad } f(a) = 0$ . Pak

- (a) Je-li kvadratická forma  $f''(a)$  pozitivně definitní, pak funkce  $f$  nabývá v bodě  $a$  svého ostrého lokálního minima.
- (b) Je-li kvadratická forma  $f''(a)$  negativně definitní, pak funkce  $f$  nabývá v bodě  $a$  svého ostrého lokálního maxima.
- (c) Je-li kvadratická forma  $f''(a)$  indefinitní, pak funkce  $f$  nenabývá v bodě  $a$  lokálního extrému.

**Poznámka 4** (Sylvesterovo kritérium). Necht'  $\mathbf{A}$  je symetrická matice reálných čísel typu  $(n, n)$ . Označme  $\{D_k\}$  posloupnost determinantů levých horních rohů. Pak

- (a)  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní, právě když všechna  $D_k > 0$ .
- (b)  $\mathbf{A}$  je pozitivně semidefinitní, právě když všechna  $D_k \geq 0$ .
- (c)  $\mathbf{A}$  je negativně definitní, právě když  $D_1 < 0$ ,  $D_2 > 0$ ,  $D_3 < 0 \dots$
- (d)  $\mathbf{A}$  je negativně semidefinitní, právě když  $D_1 \leq 0$ ,  $D_2 \geq 0$ ,  $D_3 \leq 0 \dots$
- (e)  $\mathbf{A}$  je indefinitní, když nenastane žádný z předchozích případů.

### Příklady

8. Najděte lokální extrémy funkcí

(a)  $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

(e)  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

(b)  $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$

(f)  $f(x, y) = (x - y + 1)^2$

(c)  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} (2y^2 + x^2)$

(d)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(g)  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$