

1a

$$(2) \quad f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4y + 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4x$$

$$4(-y + x^3) = 0$$

$$4(y - x) = 0$$

$$y = x$$

↓

$$-x + x^3 = 0$$

$$x(-1 + x^2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 1$$

$$y_3 = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

4

$$[0, 0]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -16 < 0$$

saddle

$$[1, 1]$$

$$\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 48 - 16 = 32 > 0$$

local min

$$[-1, -1]$$

$$\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 32 > 0$$

local min

15

$$(2) \quad f(x, y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2x - 4$$

$$y^2 - 2x - 4 = 0$$

1

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2yx$$

$$y(3y + 2x) = 0$$

$$y = 0$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

2

$$x = -\frac{3}{2}y$$

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$(y + 4)(y - 1) = 0$$

$$y = -4 \quad y = 1$$

$$x = 6 \quad x = -\frac{3}{2}$$

2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

4

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2x$$

$$[-2, 0]:$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \text{local max}$$

$$[6, -4]:$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = 24 - 64 = -40 < 0 \quad \text{saddle}$$

$$[-\frac{3}{2}, 1]:$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 < 0 \quad \text{saddle}$$

1c

$$(2) f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 9y^2 + 30x$$

2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 18xy + 54y$$

$$18y(x+3) = 0$$

$$y=0 \quad \vee \quad x=-3$$



2

$$6x^2 + 30x = 0$$

$$6x(x+5) = 0$$

$$x=0 \quad x=-5$$

$$54 - 90 + 9y^2 = 0$$

$$9y^2 = 36$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$[0,0] \quad [-5,0] \quad [-3,2] \quad [-3,-2]$$

2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 30$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18y$$

4x1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18x + 54$$

$$[0,0]: \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 54 \end{vmatrix} = 30 \cdot 54 > 0 \quad \text{loc. min}$$

$$[-5,0]: \begin{vmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -36 \end{vmatrix} = 30 \cdot 36 > 0 \quad \text{loc. max}$$

$$[-3,2]: \begin{vmatrix} -6 & 36 \\ 36 & 0 \end{vmatrix} = -36^2 < 0 \quad \text{saddle}$$

$$[-3,-2]: \begin{vmatrix} -6 & -36 \\ -36 & 0 \end{vmatrix} = -36^2 < 0 \quad \text{saddle}$$

61
 (2) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + x^2 - x$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 + 2x - 1$$

$$2xy + y^2 + 2x - 1 = 0$$

2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$$

$$x(x + 2y) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2y$$

2

$$y^2 - 1 = 0$$

$$\boxed{y = \pm 1}$$

$$2y(-2y) + y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$+ 3y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$[0, 1] \quad [0, -1]$$

$$[2, -1] \quad \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$$

$$(y + 1)(3y + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + 2y$$

4x1 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$[0, 1]$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$[0, -1]$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$[2, -1]$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$\left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} > 0$$

local min

(2) ~~k~~

$$f(x, y) = 5y^2 + 2y^3 + yx^2 + x^2$$

$$1 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2yx + 2x$$

$$1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10y + 6y^2 + x^2$$

3

$$2x(y+1) \quad \begin{matrix} x=0 \\ \vee \\ y=-1 \end{matrix}$$

$$y(10+6y) = 0$$

$$y=0 \quad \vee \quad y = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{matrix} -4+x^2=0 \\ x=\pm 2 \end{matrix}$$

$$[2, -1] \quad [-2, -1] \quad [0, 0] \quad [0, -\frac{5}{3}]$$

$$2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10 + 12y$$

3

$$[0, 0] \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

l. min

$$[0, -\frac{5}{3}] \quad \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$$

l. max

$$[2, -1] \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

saddle

$$[-2, -1] \quad \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

saddle

^{1P}
(2) $f(x, y) = e^x(4x^2 + 3y^2 + y^3)$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(4x^2 + 3y^2 + y^3) + e^x \cdot 8x = e^x(4x^2 + 3y^2 + y^3 + 8x)$$

2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x(6y + 3y^2)$$

$$3y(2 + y) = 0$$

$$y = 0 \quad \vee \quad y = -2$$

$$4x^2 + 8x + 12 - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$[-1, -2]$$

$$4x^2 + 8x = 0$$

$$x \cdot 4(x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

$$[0, 0] \quad [-2, 0]$$

2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x(4x^2 + 8x + 3y^2 + y^3 + 8x + 8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x(6y + 3y^2)$$

4

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x(6y + 3y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x(6 + 6y)$$

$$[0, 0] \quad \begin{vmatrix} 8e^0 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0 \quad \text{loc. min}$$

$$[-2, 0] \quad \begin{vmatrix} -8e^{-2} & 0 \\ 0 & 6e^{-2} \end{vmatrix} = -48e^{-4} < 0 \quad \text{saddle}$$

$$[-1, -2] \quad \begin{vmatrix} e^{-1} \cdot 0 & e^{-1} \cdot 0 \\ e^{-1} \cdot 0 & e^{-1} - 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{neither}$$

Příklad 3.5.9.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f , tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x, y, z) = 3x^2 + 12y = 0 \quad \& \quad f_y(x, y, z) = 2y + 12x = 0 \quad \& \quad f_z(x, y, z) = 2z + 2 = 0.$$

Z poslední rovnice dostáváme $z = -1$, zatímco odečtením šestinásobku druhé rovnice od první rovnice obdržíme $x^2 - 24x = x(x - 24) = 0$. Takže máme dva stacionární body $[0, 0, -1]$ a $[24, -144, -1]$. Protože parciální derivace $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ a $f_z(x, y, z)$ existují pro všechny body $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$, jsou nalezené body jedinými kandidáty na lokální extrémy. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v některém z nich nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y, z) &= 6x, & f_{xy}(x, y, z) &= 12, & f_{xz}(x, y, z) &= 0, \\ f_{yy}(x, y, z) &= 2, & f_{yz}(x, y, z) &= 0, & f_{zz}(x, y, z) &= 2. \end{aligned}$$

V bodě $[0, 0, -1]$ máme tedy Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní (vyzkoušejte např. vektory $(1, 1, 0)^\top$ a $(1, -1, 0)^\top$), tj. v bodě $[0, 0, -1]$ nenastává extrém.

V bodě $[24, -144, -1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(\overbrace{0, 0, -1}^{24, -144, -1}) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je pozitivně definitní. Takže funkce f má v bodě $[24, -144, -1]$ lokální minimum s hodnotou $f(24, -144, -1) = -6913$. ▲

Řešením této rovnice jsou hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Dosadíme-li získané hodnoty do rovnice $x^2 - 2y = 0$, abychom vypočetli y -ové souřadnice stacionárních bodů, dostáváme $y_1 = 0, y_2 = 2$. Zkoumaná funkce má tedy dva stacionární body $B_1 = [0, 0], B_2 = [2, 2]$.

Nyní přistoupíme ke zkoumání charakteru bodů B_1, B_2 a k tomu je zapotřebí vypočítat parciální derivace druhého řádu. Obdržíme

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -6 \quad \text{a} \quad f_{yy} = 6y.$$

Protože $f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = -36 < 0$, vidíme, že bod B_1 je sedlovým bodem funkce $f(x, y)$.

Analogickým postupem ze vztahů $f_{xx}(2, 2) \cdot f_{yy}(2, 2) - [f_{xy}(2, 2)]^2 = 108 > 0$ a $f_{xx}(2, 2) = 12 > 0$ dostáváme, že bod B_2 je bodem lokálního minima funkce $f(x, y)$.

2b)

Příklad 8.11. Najděte lokální extrémy funkce tří proměnných dané vztahem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$.

Řešení. Vyjdeme opět z parciálních derivací funkce $f(x, y, z)$, které mají tvar

$$f_x = 3x^2 - 3y - 3z, \quad f_y = 3y^2 - 3x \quad \text{a} \quad f_z = 3z^2 - 3x.$$

Položíme-li obdržené parciální derivace rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$x^2 - y - z = 0$$

$$y^2 - x = 0$$

$$z^2 - x = 0.$$

Dále lze dosadit y^2 za x do první a třetí rovnice, což dává vztahy

$$y^4 - y - z = 0$$

$$z^2 - y^2 = 0.$$

Z rovnosti $z^2 = y^2$ máme $z = y$ nebo $z = -y$.

Uvažujme nejprve případ $z = y$. Dosadíme-li za z do rovnice $y^4 - y - z = 0$, dostáváme

$$y(y^3 - 2) = 0.$$

Z obdrženého vztahu vyplývá, že $y_1 = 0$ nebo $y_2 = \sqrt[3]{2}$. Dále ihned vidíme že těmto hodnotám odpovídají hodnoty proměnné z ve tvaru $z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}$.

Z rovnosti $x = z^2$ pak vypočteme $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{4}$. Obdrželi jsme tedy dva stacionární body

$$B_1 = [0, 0, 0] \quad \text{a} \quad B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}].$$

Vyšetříme-li nyní případ $z = -y$, dostáváme po dosazení za proměnnou z do rovnice $y^4 - y - z = 0$ rovnost $y^4 = 0$, což nám dává kořen $y_3 = 0$. Pak ale také $z_3 = 0$ a $x_3 = 0$. V tomto případě jsme tedy neobdrželi žádný další stacionární bod, který by byl různý od bodů B_1 a B_2 .

Pro parciální derivace druhého řádu dostaneme

$$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{zz} = 6z, f_{xy} = -3, f_{xz} = -3, f_{yz} = 0.$$

Chceme-li nyní vyšetřit kvadratickou formu, kterou představuje diferenciál druhého řádu, pracujeme vlastně s determinantem

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix}.$$

Uvažujeme-li bod $B_1 = [0, 0, 0]$, dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ihned vidíme, že hlavní minor $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ je záporný, což znamená, že příslušná kvadratická forma je indefinitní a počátek je tedy sedlovým bodem funkce $f(x, y, z)$.

V bodě $B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ máme

$$D = \begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{vmatrix}$$

a vidíme, že $D_1 = 6\sqrt[3]{4} > 0$, $D_2 = 36 \cdot 2 - 9 > 0$, $D_3 = 216\sqrt[3]{16} - 108\sqrt[3]{2} > 0$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní a bod B_2 je v důsledku toho bodem lokálního minima funkce $f(x, y, z)$.

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = y e^{\frac{x}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$Hf(-2, 0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-2, 0) & f_{xy}(-2, 0) \\ f_{yx}(-2, 0) & f_{yy}(-2, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že vlastními čísly diagonální matice jsou právě hodnoty na diagonále a že pozitivní definitnost matice znamená, že všechna její vlastní čísla jsou kladná. Odtud již plyne, že v bodě $[-2, 0]$ je ostré lokální minimum.

□

8.3. Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Funkce f je polynomem (mnohočlenem), a tudíž o ní víme, že má parciální derivace všech řádů. Hledejme proto stacionární body (jinde extrém být nemůže) tak, že zderivujeme f postupně podle x , y , z a tyto derivace položíme rovny nule. Takto dostaneme

$$3x^2 - 3z = 0, \quad \text{tj.} \quad z = x^2,$$

$$2y - 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad y = 1,$$

a (s využitím první rovnice)

$$z - 3x + 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad x \in \{1, 2\}.$$

Existují tedy dva stacionární body $[1, 1, 1]$, $[2, 1, 4]$. Vypočtěme nyní všechny parciální derivace druhého řádu

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{xz} = f_{zx} = -3,$$

$$f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = f_{zy} = 0, \quad f_{zz} = 1.$$

S jejich pomocí ve stacionárních bodech snadno určíme Hessovu matici

$$Hf(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Hf(2, 1, 4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme zjistit, zda jsou tyto matice pozitivně definitní, negativně definitní, příp. indefinitní, abychom mohli rozhodnout, jestli a jaké jsou v nich extrémy. V případě první z matic (pro bod $[1, 1, 1]$) ihned vidíme vlastní číslo $\lambda = 2$. Neboť je její determinant roven -6 a jedná se o symetrickou matici (všetchna vlastní čísla jsou reálná), matice musí mít také záporné vlastní číslo (determinant je součinem vlastních čísel). Matice $Hf(1, 1, 1)$ je tedy indefinitní – v bodě $[1, 1, 1]$ extrém není.

Pro matici $Hf(2, 1, 4)$ použijeme tzv. Sylvestrovo kritérium. Podle tohoto kritéria je reálná symetrická matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory A , tj. determinanty

$$d_1 = |a_{11}|, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad d_n = |A|,$$

jsou kladné, a je negativně definitní tehdy a jenom tehdy, když je

$$d_1 < 0, \quad d_2 > 0, \quad d_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n d_n > 0.$$

Neboť

$$|12| = 12 > 0, \quad \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0, \quad \begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0,$$

matice $Hf(2, 1, 4)$ je pozitivně definitní – v bodě $[2, 1, 4]$ je ostré lokální minimum. $\square$

8.4. Stanovte lokální extrémy funkce

$$z = (x^2 - 1)(1 - x^4 - y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Opět spočítáme parciální derivace z_x a z_y a položíme je rovny nule. Takto obdržíme rovnice

$$-6x^5 + 4x^3 + 2x - 2xy^2 = 0, \quad (x^2 - 1)(-2y) = 0$$

s řešeními $[x, y] = [0, 0]$, $[x, y] = [1, 0]$, $[x, y] = [-1, 0]$. Doplňme, že k nalezení řešení stačilo určit reálné kořeny $1, -1$ polynomu $-6x^4 + 4x^2 + 2$ pomocí substituce $u = x^2$. Nyní vypočítáme druhé parciální derivace

$$z_{xx} = -30x^4 + 12x^2 + 2 - 2y^2, \quad z_{xy} = z_{yx} = -4xy, \quad z_{yy} = -2(x^2 - 1)$$

a ve stacionárních bodech vyčíslíme Hessovu matici se ziskem

$$Hz(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hz(1, 0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hz(-1, 0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že první z matic je pozitivně definitivní, a tudíž je v počátku ostré lokální minimum.

Zbývající dvě matice jsou ale negativně semidefinitní. Nelze tedy na základě druhých parciálních derivací s určitostí říci, zda je v bodech $[1, 0]$, $[-1, 0]$ extrém. Zkoumejme proto funkční hodnoty v okolí těchto bodů. Platí

$$z(1, 0) = z(-1, 0) = 0, \quad z(x, 0) < 0 \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Uvažujme dále y v závislosti na $x \in (-1, 1)$ dané předpisem $y = \sqrt{2(1 - x^4)}$ splňujícím, že $y \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \pm 1$. Pro tuto volbu je však

$$z\left(x, \sqrt{2(1 - x^4)}\right) = (x^2 - 1)(x^4 - 1) > 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Ukázali jsme, že v libovolně malých okolích bodů $[1, 0]$, $[-1, 0]$ nabývá z hodnot větších i menších, než je funkční hodnota v těchto bodech. Nejedná se tak o extrémy. $\square$

Celkem tedy máme 6 podezřelých bodů: $[0, 0]$, $[1, 0]$, $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dosazením do funkce f dostaneme, že

$$M = f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = \frac{3}{2},$$

$$m = f([0, 0]) = 0.$$

3a)

- c) $f(x, y) := (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$, $S = \mathbb{R}^2$. Zřejmě $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, kde $g(t) = te^{-t}$. Obor hodnot funkce $x^2 + y^2$ je $[0, \infty)$. Tedy potřebujeme vyšetřit průběh funkce g na tomto intervalu – zajímají nás minima a maxima. Jednoduchým zderivováním dostaneme, že minimum má funkce g v nule ($g(0) = 0$) a maximum má v bodě 1 ($g(1) = \frac{1}{e}$).

Zbývá si rozmyslet, kdy je $x^2 + y^2$ rovno 0 a 1. Což je triviální, dostaneme tedy, že **minimum funkce f na $\mathbb{R}^2$ je 0, které se nabývá pouze v nule, a maximum je $\frac{1}{e}$ a nabývá se ho ve všech bodech kde $x^2 + y^2 = 1$, to jest na jednotkové kružnici se středem v počátku.**

- d) $f(x, y) := \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $S = \left\{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{y^2} = 1\right\}$.

$$M = f\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3}\right]\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$m = f\left(\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3}\right]\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

K řešení se dá dorazit třeba vyšetřením pomocné úlohy $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} + \tilde{y}$ na množině $\tilde{S} = \{\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 \leq 1\}$. Zpátky se pak dá vrátit substitucí $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ a $\tilde{y} = \frac{1}{y}$.

Hranice množiny $\tilde{S}$ je elipsa, a lze ji parametrizovat například takto:

$$x = \cos t,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t,$$

$$t \in [0, 2\pi).$$

- e) $f(x, y, z) := (x + y + z)e^{-(x + 2y + 3z)}$, $S = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Zde množina není kompaktní, a tedy maxima ani minima se nabývat nemusí. A vskutku se ho ani nenabývá – stačí si funkci zderivovat a využít Věty 4.

Můžeme vyšetřit, kde se nabývá infima a suprema. Abychom s úlohou mohli nějak pracovat, tak je třeba se omezit na nějaký kompakt – množinu tedy uzavřeme a omezíme. Zjistíme, že uvnitř žádné podezřelé body nejsou. Nejsou dokonce ani na hraničních čtvrtrovinách. Zbývají hraniční přímky, kde nalezneme podezřelé body $[0, 0, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[0, \frac{1}{2}, 0]$ a $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Infimum je $0 = f([0, 0, 0])$ a supremum je $\frac{1}{e} = f([1, 0, 0])$.

což je ovšem ve sporu s první rovnicí z výše uvedené soustavy. Proto $\mu \neq 0$, a tedy $y = z$. Protože $(x, y, z) \in M_2$, dostáváme $x^2 + 2y^2 = 1$ a $x^3 + 2y^3 = 0$. To splňují jediné body $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$.

Nalezli jsme tedy sedm podezřelých bodů, mezi nimiž jsou body, v nichž se nabývá extrémů. Funkční hodnoty v nich jsou $0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\pm \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}$. Snadno zjistíme, že $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, a tudíž maximum je $1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ a $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$) a minimum je $-1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ a $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$). ■

Všimněte si, že jsme uvedené soustavy rovnic neřešili „až do konce“. Naším cílem nebylo totiž najít právě všechna řešení (což je potřebné při vyšetřování lokálních extrémů), ale jen co nejjednodušeji najít co nejmenší množinu obsahující všechna řešení. Nevadilo by nám, kdyby obsahovala několik málo bodů navíc.

§69. V případě, že nás zajímají extrémy spojitě funkce na nekompaktní množině, lze někdy množinu redukovat na kompaktní pomocí vyšetření „limitního chování v nekonečnu“.

P ř í k l a d Najděte extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Zatímco funkce f je zřejmě spojitá, množina $\mathbb{R}^2$ není kompaktní. Nicméně tvar funkce f umožňuje provést některé úvahy. Jednak je funkce f zřejmě nezáporná a nulové hodnoty nabývá jen v počátku. Proto má minimum 0. Dále můžeme usoudit, že pro body „hodně vzdálené“ od počátku budou funkční hodnoty „hodně malé“, protože „exponenciála převáží polynom“. Tyto úvahy lze zformulovat přesně. Využijme faktu, že $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = 0$ (což ověříme například l'Hospitalovým pravidlem).

Je totiž $f(x, y) \leq 7(5x^2 + 2y^2)e^{-(5x^2 + 2y^2)}$ na celém $\mathbb{R}^2$. Protože $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = 0$, existuje $R > 0$ takové, že pro $t \geq R$ platí $te^{-t} < \frac{1}{14}f(1, 1)$. Uvažme množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 2y^2 \leq R\}$. Tato množina je uzavřená a omezená (jde o nějakou elipsu se středem v počátku), je tedy kompaktní. Funkce f na M tudíž nabývá svého maxima v nějakém bodě (x_0, y_0) . Pokud je bod (x, y) mimo M , je $f(x, y) < \frac{1}{2}f(1, 1)$ (to plyne z volby R). Proto bod $(1, 1)$ patří do množiny M , a tedy $f(x_0, y_0) \geq f(1, 1)$. Tudíž pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ platí $f(x_0, y_0) > f(x, y)$. Proto funkce f má v bodě (x_0, y_0) maximum na $\mathbb{R}^2$.

Tím jsme ukázali, že f nabývá svého maxima na $\mathbb{R}^2$. Protože množina $\mathbb{R}^2$ je otevřená, stačí najít body, v nichž má f nulové parciální derivace prvního řádu a z nich vybrat ten, v němž je největší funkční hodnota.

Jest $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 10x(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2 - 2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = (14y - 4y(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2 - 2y^2}$. Obě jsou nulové, právě když $2x - 10x(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14y - 4y(x^2 + 7y^2) = 0$. Jsou čtyři možnosti:

- (i) $x = 0$ a $y = 0$ – tím dostaneme již známý bod minima $(0, 0)$.
(ii) $x = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – odtud dostaneme dva body $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. V obou je hodnota f rovna $\frac{7}{2e}$.
(iii) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $y = 0$ – odtud dostaneme dva body $(1/\sqrt{5}, 0)$ a $(-1/\sqrt{5}, 0)$. V obou je hodnota f rovna $\frac{1}{5e}$.
(iv) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – tento případ však nemůže nastat, protože výraz $x^2 + 7y^2$ nemůže být zároveň $1/5$ i $7/2$.
Nyní porovnáním výsledků dostaneme, že funkce f nabývá maxima $\frac{7}{2e}$ v bodech $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. ■

§70. Pokud funkce extrémů nenabývá, nebo alespoň nevíme předem, zda nabývá, hledáme supremum a infimum. Přitom nám někdy může pomoci následující pozorování.

Nechť funkce f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Toto se hodí například v případě, že množina M je omezená. Pak totiž její uzávěr je kompaktní, a je-li f na $\overline{M}$ spojitá, pak můžeme na $\overline{M}$ najít extrémy, a tím určíme supremum a infimum na M .

P ř í k l a d Najděte supremum a infimum funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$. Existuje minimum a maximum funkce f na M ?

Řešení. Množina M je otevřená a f má všude na M parciální derivace. Pokud tedy má f extrém v nějakém bodě M , musí v něm být parciální derivace prvního řádu nulové, tj. $\cos x = 0$ a $\cos y = 0$. To splňují body tvaru $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Žádný z těchto bodů ovšem v M neleží. Proto f na M extrémů nenabývá.

Nicméně funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a $\overline{M}$ je kompaktní (M je otevřený kruh o středu 0 a poloměru $\pi/2$, $\overline{M}$ je příslušný uzavřený kruh). Proto f nabývá extrémů na $\overline{M}$. Protože v M extrémy nemá, nabývá jich na hranici, tj. na množině $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \pi^2/4\}$. (Jelikož M je otevřená, je $\partial M = \overline{M} \setminus M$.) To je kružnice, a tedy bychom ji mohli parametrizovat jako v §67. Tento postup necháváme na čtenáři, zde použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů z §68.

Funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 - \pi^2/4$ je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, její parciální derivace jsou $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Obě jsou nulové pouze v bodě $(0, 0)$, který neleží v ∂M . Proto, má-li funkce f v nějakém bodě ∂M lokální extrém (vzhledem k ∂M), existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které platí:

$$\begin{aligned}\cos x + \lambda \cdot 2x &= 0, \\ \cos y + \lambda \cdot 2y &= 0, \\ x^2 + y^2 - \pi^2/4 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme, že $y \cos x - x \cos y = 0$. Všimněme si, že nemůže být $x = 0$ ani $y = 0$. Jinak by totiž nebyla splněna první nebo druhá rovnice. Proto

všechna (x, y, z) různá od bodů (39) je $|f(x, y, z)| < U$, stačí najít kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^3$, která obsahuje všech 15 stacionárních bodů uvnitř, přičemž

$$(43) \quad (x, y, z) \in \partial K \cup (\mathbb{R}^3 - K) \Rightarrow |f(x, y, z)| < U.$$

Funkce $g(r)$ je kladná v $\mathbb{R}_+$ a má derivaci $g'(r) = 3r^2(3-2r^2) \exp(-r^2)$ zápornou všude v intervalu $(\sqrt{3/2}, +\infty)$, takže tam klesá. Z nerovností $|f(x, y, z)| \leq g(r)$, $e^3 > 20$ plyne, že

$$g(3) = \frac{3^4}{e^9} < \frac{100}{20^3} = \frac{1}{80} = 0.0125 < U;$$

za K tedy stačí zvolit uzavřenou kouli $\overline{U((0, 0, 0), 3)}$.

Příklad 17.8. Funkce f třídy C_∞ definovaná rovností

$$(44) \quad f(x, y) := 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3} \quad \text{v } X := \mathbb{R}_+^2$$

je nezáporná a shora neomezená. Jediným společným řešením rovnic

$$(45) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3 - \frac{8y}{x^3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4} = 0$$

v X je bod $(x, y) = (2, 3)$, přičemž $f(2, 3) = 10$. Tvrdíme, že f má v bodě $(2, 3)$ *minimum*.

Abychom to dokázali, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ obsahující bod $(2, 3)$ uvnitř a splňující podmínku

$$(46) \quad (x, y) \in X - \text{int } K \Rightarrow f(x, y) > 10.$$

Uvažme především, že všechny tři sčítance na pravé straně (44) jsou v X kladné, takže $f(x, y)$ je větší než kterýkoli z nich. Uvažme konkrétněji, že

1) $f(x, y) > 3x \geq 10$, je-li $x \geq 4$; ⁵⁾

2) $0 < x \leq 4 \Rightarrow f(x, y) > 4y/x^2 \geq \frac{1}{4}y \geq 10$ pro všechna $y \geq 40$;

3) $f(x, y) > 27/y^3 \geq 10$, je-li $y^3 \leq 2.7$, tedy jistě pro všechna $y \in (0, 1)$;

4) $y \geq 1 \Rightarrow f(x, y) > 4y/x^2 \geq 4/x^2 \geq 10$, je-li $x^2 < \frac{2}{5}$, tedy jistě pro $x \in (0, \frac{3}{5})$ (protože $(\frac{3}{5})^2 < \frac{2}{5}$).

Z 1)–4) je patrné, že stačí položit

$$(47) \quad K := \langle \frac{3}{5}, 4 \rangle \times \langle 1, 40 \rangle.$$

* * *

⁵⁾ Místo „4“ bychom samozřejmě mohli napsat „10/3“, ale pro jednoduchost dalších výpočtů i zápisu se vyhýbáme zbytečným zlomkům. Je zřejmé, že při hledání množiny K máme značnou volnost, a to nejen v tomto konkrétním případě. Je-li (v obecném případě) $a \in X$ jediný bod, pro nějž je $A := \min f(X) = f(a)$, splňuje *každá* kompaktní množina $K \subset X$, obsahující bod a uvnitř, podmínku $x \in X - \text{int } K \Rightarrow f(x) > A$. Hlavním kritériem pro výběr množiny K je proto *jednoduchost ověření této podmínky za situace, kdy existenci minima teprve dokazujeme*.

Tedy pokud $g'(x) = 0$, pak $x = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Máme tedy podezřelé body $[\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Zahrneme ještě do úvahy krajní body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.

Při vyšetřování f na M_2 nám vyjdou body $[\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodech zjistíme, že

$$\begin{aligned}\min f(M) &= f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \\ \max f(M) &= f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.\end{aligned}$$

♣

11.8.40. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \quad M = \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Množina M není omezená. Vzhledem k tomu, že

$$f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,$$

nabývá f svého minima $\min f(M) = -14$ v bodě $[-1, -2, 3]$. Jelikož

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, -2, 3) = \infty,$$

supremum f na M je rovno ∞ .

♣

11.8.41. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Řešení. Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$ a $\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Ze spojitosti f na $\mathbb{R}^3$ plyne rovnost $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Vyšetříme nejprve body podezřelé z extrému, které leží v $\text{Int } \overline{M} = M$. V těchto bodech musí být $\nabla f(x, y, z) = 0$, tj.

$$e^{-(x+2y+3z)} [1 - (x + y + z), 1 - 2(x + y + z), 1 - 3(x + y + z)] = 0.$$

Tato soustava však nemá řešení, a tedy v M žádný bod podezřelý z extrému neleží.

Uvažujme nyní jednu ze „stěn“ tvořící ∂M , například

$$M_1 = \{[x, y, 0] \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Pak máme funkci $g(x, y) = f(x, y, 0) = (x + y)e^{-(x+2y)}$ na $N = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Jako výše dostaneme, že g nemá v $\text{Int } N$ podezřelý bod. Musíme tedy uvažovat $\partial N = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{[x, 0] \mid x \geq 0\}, \quad N_2 = \{[0, y] \mid y \geq 0\}.$$

Funkce $h(x) = g(x, 0) = xe^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, má bod podezřelý z extrému v 0 a v bodě, kde $h'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$, tj. v $x = 1$. Dostáváme tak body

$$[0, 0, 0], [1, 0, 0].$$

3d)

V množině N_2 dostáváme další podezřelý bod $[0, \frac{1}{2}, 0]$. Tím máme vyřešenu otázku množiny N .

Zbývající stěny tvořící ∂M poskytnou bod $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Funkce f je zjevně nezáporná na $\overline{M}$, tedy

$$\in f(M) = \min f(\overline{M}) = f(0, 0, 0) = 0.$$

Zbývá dokázat, že

$$\sup f(M) = \max f(\overline{M}) = f(1, 0, 0) = e^{-1}.$$

K tomuto účelu uvažujme odhad

$$f(x, y, z) \leq \frac{x + y + z}{e^{x+y+z}}, \quad [x, y, z] \in \overline{M}. \quad (11.35)$$

Jelikož $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{e^r} = 0$, existuje $r > 1$ takové, že $\frac{r}{e^r} < e^{-1}$. Uvažujme množinu

$$K = \{[x, y, z] \in \overline{M}; x + y + z \leq r\}.$$

Pak K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f tedy nabývá na K svého maxima, přičemž z výpočtů výše a (11.35) plyne, že $\max f(K) = f(1, 0, 0)$. Díky (11.35) dále máme, že $\max f(K) = \max f(\overline{A})$. Tím je důkaz dokončen. ♣

11.8.42. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M , kde

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z, \quad M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$. Proto nabývá na M svých extrémů. Pokud $x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ splňují $z_1 < z_2$, pak $f(x, y, z_1) < f(x, y, z_2)$. Tedy f nabývá své maximum na $M_1 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{1\}$ a minimum na $M_2 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{-1\}$.

K určení maxima tak vyšetřujeme maximum funkce $g(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1$ na množině $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Jelikož $g(x, y) = 2 \operatorname{dist}([x, y], 0)^2 + 1$, vidíme, že body v $[-1, 1] \times [-1, 1]$ nejvzdálenější od počátku jsou $[1, 1]$, $[-1, 1]$, $[-1, -1]$, $[1, -1]$.

Podobně postupujeme při hledání minima a dospějeme k bodu $[0, 0]$. Tedy

$$\min f(M) = f(0, 0, -1) = -1,$$

$$\max f(M) = f(1, 1, 1) = f(1, -1, 1) = f(-1, -1, 1) = f(-1, 1, 1) = 5. \quad \clubsuit$$

11.8.43. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M , kde

$$f(x, y) = x + y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená. Díky Příkladu 11.8.29 víme, že M je omezená a tedy je kompaktní. Funkce f je spojitá, a tedy nabývá na M svých extrémů. Použijeme Větu 11.5.8 pro $G = \mathbb{R}^2$, $m = 1$ a $g(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Platí

$$\nabla g(x, y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x),$$

4a)

Příklad 17.1^o. Vyšetřujeme extrémy funkce

$$(1) \quad f(x, y) := x^3 - 2x^2y + 3y^3 \quad \text{v} \quad X := \langle -1, 1 \rangle^2.$$

Protože f je třídy C_∞ v celé rovině, najdeme nejdříve všechny její stacionární body. Snadno zjistíme, že funkce

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2$$

mají jediný společný kořen, a to bod $(0, 0)$. Protože f v něm nabývá hodnoty 0 a protože f je v některých bodech z X kladná, v jiných záporná ($f(\pm 1, 0) = \pm 1$), nemá f v bodě $(0, 0)$ žádný extrém.

Protože f v int X ani maxima, ani minima nenabývá, leží oba extrémy na hranici X . Vzhledem k tomu, že ∂X je sjednocením čtyř úseček, vyšetříme funkce

$$(3) \quad g_1(x) := f(x, -1) = x^3 + 2x^2 - 3, \quad g_2(x) := f(x, 1) = x^3 - 2x^2 + 3,$$

$$(4) \quad h_1(y) := f(-1, y) = 3y^3 - 2y - 1, \quad h_2(y) := f(1, y) = 3y^3 - 2y + 1.$$

Derivace $3x^2 + 4x$ a $3x^2 - 4x$ funkcí (3)¹ jsou rovny nule po řadě v bodech 0, $-\frac{4}{3}$ a v bodech 0, $\frac{4}{3}$. Protože body $\pm(\frac{4}{3}, 1)$ neleží v X , počítáme pouze hodnoty

$$(5') \quad f(-1, -1) = -2, \quad f(0, -1) = -3, \quad f(1, -1) = 0,$$

$$(5'') \quad f(-1, 1) = 0, \quad f(0, 1) = 3, \quad f(1, 1) = 2.$$

Derivace $h_1'(y) = h_2'(y) = 9y^2 - 2$ funkcí (4) mají kořeny $\pm c$, kde $c := \frac{1}{3}\sqrt{2}$; protože hodnoty funkce f ve vrcholech čtverce X jsou již uvedeny v (5') a v (5''), počítáme jen

$$(6') \quad f(-1, -c) = \frac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -0.37, \quad f(-1, c) = -\frac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -1.63,$$

$$(6'') \quad f(1, -c) = 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 1.63, \quad f(1, c) = 1 - \frac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 0.37.$$

Porovnáme-li hodnoty z (5') – (6''), vidíme, že

$$(7) \quad M := \max f(X) = f(0, 1) = 3, \quad m := \min f(X) = f(0, -1) = -3.$$

Pro všechny body $(x, y) \in X$, pro něž je $(0, 1) \neq (x, y) \neq (0, -1)$, platí přitom ostré nerovnosti $m < f(x, y) < M$.

Příklad 17.2^o. Najdeme extrémy funkce

$$(8) \quad f(x, y) := 4x^3 - 3x - 4y^3 + 9y \quad \text{v} \quad X := \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\};$$

f je opět třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a rovnice

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12y^2 + 9 = 0$$

¹ Funkce (3) buď skutečně derivujeme, nebo (což je zejména ve složitějších případech asi jednodušší) dosadíme do první rovnosti v (2) po řadě $y = -1$ a $y = 1$.

10. Hledání extrémů funkce na množině

Ukážeme si základní metody hledání největší a nejmenší hodnoty funkce více reálných proměnných na množině (a bodů, ve kterých se těchto hodnot nabývá). V případě, že funkce největší a nejmenší hodnoty nenabývá, budeme hledat supremum a infimum. Jak jsme se již zmínili, budou nás zajímat především funkce více proměnných. Přesto bude užitečné umět vyšetřovat funkce jedné proměnné, jejichž extrémy hledáme například pomocí vyšetření monotonie. Hlavní metody jsou popsány v [Z, oddíl 2.9].

Extrémům ve smyslu předchozího odstavce se často říká *globální extrémy* (někdy *absolutní extrémy*, viz [Z]), aby se odlišily od lokálních extrémů. My budeme říkat prostě extrémy, což je jednak kratší a jednak dostatečně určující.

§66. Asi nejdůležitějším prostředkem hledání extrémů je kombinace existenční věty a různých nutných podmínek pro (lokální) extrém (tzv. „**metoda podezřelých bodů**“). Základní existenční větou je věta následující.

Reálná funkce spojitá na neprázdné kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$ nabývá na M svého maxima i minima.

Nejjednodušší nutná podmínka vychází z pozorování, že nabývá-li se extrém v nějakém vnitřním bodě množiny, pak je v tomto bodě i lokální extrém, a z následující věty.

Nechť G je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ nechť má v bodě $a \in G^\circ$ lokální extrém. Pokud pro nějaké $i = 1, \dots, n$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Metoda spočívá v tom, že vyloučíme body, které nesplňují námi uvažované nutné podmínky. Zbylým bodům se říká „podezřelé body“. Mezi nimi dále hledáme ty, v nichž je funkční hodnota největší nebo nejmenší. V následujícím příkladu ukážeme, jak uvedený postup použijeme s použitím uvedené nutné podmínky.

Příklad Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Řešení. Funkce f je polynom v proměnných x a y , je tedy spojitá na celém $\mathbb{R}^2$. Množina M je uzavřená (lze vyjádřit např. jako průnik dvou množin, které jsou vzorem uzavřených intervalů při spojitě funkci) a omezená (je totiž rovna uzavřenému čtverci o straně 2, se středem v počátku a se stranami rovnoběžnými s osami, je tedy obsažena v kruhu o poloměru $\sqrt{2}$ se středem v počátku), je tudíž kompaktní. Navíc je M zřejmě neprázdná, a tak f nabývá na M svých extrémů.

Nyní již víme, že f nabývá na M extrémů, zbývá tyto hodnoty určit. Vyloučíme tedy body, kde extrém být nemůže, pomocí uvedené nutné podmínky. Množina M však není otevřená, musíme proto rozlišit dva případy.

a) Funkce f nabývá některého extrému v nějakém bodě vnitřku M . Protože f má parciální derivace prvního řádu, musí být v tomto bodě nulové. Platí tedy

$2x + y = 0$, $-6y + x = 0$, což je splněno pouze pro $x = y = 0$. Jediný bod vnitřku M , kde f může nabývat extrému, je tedy bod $(0, 0)$, kde $f(0, 0) = 0$.

b) Funkce f nabývá některého extrému na hranici M . Protože M je uzavřená, je její hranice rovna $M \setminus M^\circ$, je tedy tvořena čtyřmi úsečkami. Probereme je postupně.

i) $x = 1$, $y \in [-1, 1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(1, y) = 1 + y - 3y^2$. Má-li f extrém v bodě $(1, y_0)$, pak funkce (jedné proměnné) $y \mapsto 1 + y - 3y^2$ má extrém (stejněho druhu) v bodě y_0 . To se může stát buď v případě, že y_0 je krajním bodem intervalu $[-1, 1]$, nebo v případě, že uvedená funkce jedné proměnné má v y_0 nulovou derivaci (protože derivace existuje). První možnost dává body $(1, -1)$ a $(1, 1)$, přičemž $f(1, -1) = -3$ a $f(1, 1) = -1$. Druhá možnost dává rovnici $1 - 6y = 0$, tedy bod $(1, 1/6)$, přičemž $f(1, 1/6) = 13/12$.

ii) $x = -1$, $y \in [-1, 1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(-1, y) = 1 - y - 3y^2$. Podobně jako v předchozím bodu dostáváme jednak krajní body $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$, přičemž $f(-1, 1) = -3$ a $f(-1, -1) = -1$; a pak body, v nichž platí $-1 - 6y = 0$, neboli bod $(-1, -1/6)$. V něm máme $f(-1, -1/6) = 13/12$.

iii) $y = 1$, $x \in (-1, 1)$. Zde krajní body vyšetřovat nemusíme, neboť jsme je zahrnuli již v bodech i) a ii). Funkce f má zde tvar $f(x, 1) = x^2 + x - 3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x + 1 = 0$, což splňuje jen bod $(-1/2, 1)$. V něm máme $f(-1/2, 1) = -13/4$.

iv) $y = -1$, $x \in (-1, 1)$. Funkce f má zde tvar $f(x, -1) = x^2 - x - 3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x - 1 = 0$, což splňuje jen bod $(1/2, -1)$. V něm máme $f(1/2, -1) = -13/4$.

Zbývá učinit závěr. Víme, že funkce f svých extrémů na M nabývá a že jich nemůže nabývat mimo nalezených devět bodů. Porovnáním hodnot ve zmíněných bodech zjistíme, že maximum je rovno $13/12$ a nabývá se ve dvou bodech $(1, 1/6)$ a $(-1, -1/6)$; a minimum je $-13/4$ a nabývá se v bodech $(-1/2, 1)$ a $(1/2, -1)$. ■

Poznamenejme, že při vyšetřování funkce f na hranici množiny M v předchozím příkladě jsme mohli využít symetrie této funkce, konkrétně toho, že $f(-x, -y) = f(x, y)$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pak výsledek případu (ii) lze odvodit z případu (i) a výsledek případu (iv) lze odvodit z případu (iii).

§67. Z řešení příkladu v předchozím paragrafu je zřejmé, že potřebujeme znát nutné podmínky pro extrém na hranici množiny. Ve zmíněném příkladu bylo možné analýzu hranice jednoduše převést na analýzu funkce jedné proměnné. To je možné i v dalších případech pomocí **parametrizace hranice**, například, je-li hranicí kružnice či elipsa.

4c)

P ř í k l a d Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je uzavřená (lze ji vyjádřit jako vzor uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení) a omezená (z definující nerovnosti je zřejmé, že každý bod

$(x, y) \in M$ splňuje $|x| \leq 1/2$ a $|y| \leq 1$), je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, a tedy nabývá na množině M svých extrémů.

Protože $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ ve všech bodech $\mathbb{R}^2$, parciální derivace nejsou nikde nulové (a všude existují), a tudíž f nemá ve vnitřku M žádný lokální extrém. Proto nabývá svých extrémů na hranici.

Hranicí množiny M je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x^2 + y^2 = 1\}$ (množina M je elipsa včetně svého vnitřku, hranicí je její obvod). Tu můžeme parametrizovat pomocí modifikace polárních souřadnic: $x = \frac{1}{2} \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Tato parametrizovaná křivka obvod elipsy proběhne nekonečněkrát, kdybychom chtěli každý bod proběhnout právě jednou, museli bychom se omezit na menší interval, například na $t \in [0, 2\pi)$. To my však nepotřebujeme. Nyní použijeme pozorování, že má-li f extrém v nějakém bodě $(x, y) = (\frac{1}{2} \cos t_0, \sin t_0)$, pak má funkce $t \mapsto f(\frac{1}{2} \cos t, \sin t) = \frac{1}{2} \cos t + \sin t$ extrém v bodě t_0 . Tato funkce je diferencovatelnou funkcí jedné proměnné, a tedy v bodech extrému musí mít nulovou derivaci. Odtud dostáváme rovnici $-\frac{1}{2} \sin t + \cos t = 0$, neboli $\sin t = 2 \cos t$. Protože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, musí platit $\sin t = 2/\sqrt{5}$ a $\cos t = 1/\sqrt{5}$ nebo $\sin t = -2/\sqrt{5}$ a $\cos t = -1/\sqrt{5}$. Mohli bychom nyní možné hodnoty t vyjádřit pomocí cyklotrických funkcí. To však není třeba, protože nás zajímají body $(\frac{1}{2} \cos t, \sin t)$ a nikoli hodnota t . Dostáváme tedy dva body $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

Je $f(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ a $f(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, v prvním z bodů je tedy maximum a ve druhém minimum. ■

Podobně můžeme postupovat vždy, když hranici umíme vhodně parametrizovat – ať již celou nebo po částech. Pro kružnici můžeme použít polární souřadnice, pro povrch koule v $\mathbb{R}^3$ sférické souřadnice atp.

§68. Další metodou užitečnou při vyšetřování funkcí na některých množinách bez vnitřních bodů (např. na hranicích některých množin) je **metoda Lagrangeových multiplikátorů**. Je založena na použití Věty 217 v [D2, kapitola X, §3], konkrétně její první části, která obsahuje nutnou podmínku pro lokální extrém funkce na množině určené několika rovnostmi. Znění této věty je připomenuto v §64. Níže uvedené odkazy používají tam uvedené značení.

P ř í k l a d Najděte extrémy funkce $f(x, y, z) = x$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^3 + y^3 + z^3 = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená, omezená a neprázdná, funkce f spojitá dokonce na celém $\mathbb{R}^3$, a tedy f na M svých extrémů nabývá.

Při jejich hledání využijeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Aby ji bylo možno použít, rozdělíme si množinu M na dvě části

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$$

Příklad 3.5.11.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

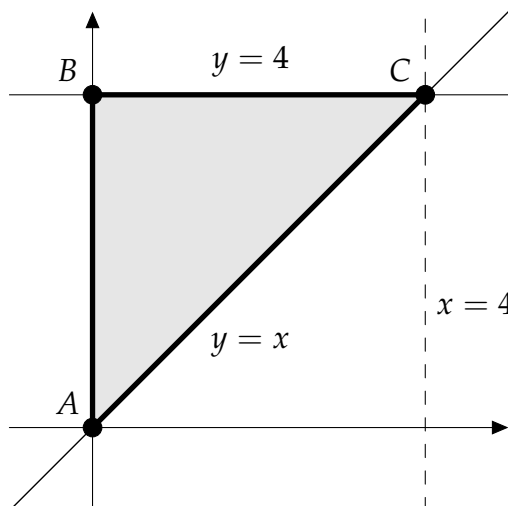
$$f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$$

na množině na množině M , která je určena nerovnostmi $0 \leq x \leq y \leq 4$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f , tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x, y) = 2x - 1 = 0 \quad \& \quad f_y(x, y) = -6y + 18 = 0.$$

Řešením je bod $[1/2, 3]$ s funkční hodnotou $f(1/2, 3) = 123/4$. Protože $[1/2, 3] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.37: Množina M z Příkladu 3.5.11.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.37), kterou tvoří tři úsečky:

- (i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $x = 0$ pro $0 \leq y \leq 4$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $g(y) = -3y^2 + 18y + 4$. Určíme stacionární body funkce g , tj. $g'(y) = -6y + 18 = 0$. Odtud máme $y = 3$, což vyhovuje omezení pro y . Proto $[0, 3]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0, 3) = 31$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(0, 0) = 4$ a $f(B) = f(0, 4) = 28$.
- (ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = 4$ pro $0 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $h(x) = x^2 - x + 28$. Určíme stacionární body funkce h , tj. $h'(x) = 2x - 1 = 0$. Odtud máme $x = 1/2$, což vyhovuje omezení pro x . Proto

$[1/2, 4]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(1/2, 4) = 111/4$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(B) = f(0, 4) = 28$ a $f(C) = f(4, 4) = 40$.

- (ii) Úsečku spojující body C a A lze vyjádřit jako $y = x$ pro $0 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = -2x^2 + 17x + 4$. Určíme stacionární body funkce m , tj. $m'(x) = -4x + 17 = 0$. Odtud máme $x = 17/4$, což nevyhovuje omezení pro x , tj. $[17/4, 17/4] \notin M$. Takže v tomto případě jsou kandidáty pouze krajní body této úsečky, v nichž vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(C) = f(4, 4) = 40$ a $f(A) = f(0, 0) = 4$.

Celkem jsme našli 6 kandidátů na globální extrém, ze kterých stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = 4$ a globální maximum v bodě $[4, 4]$ s hodnotou $f_{\max} = 40$. ▲

Příklad 3.5.13.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

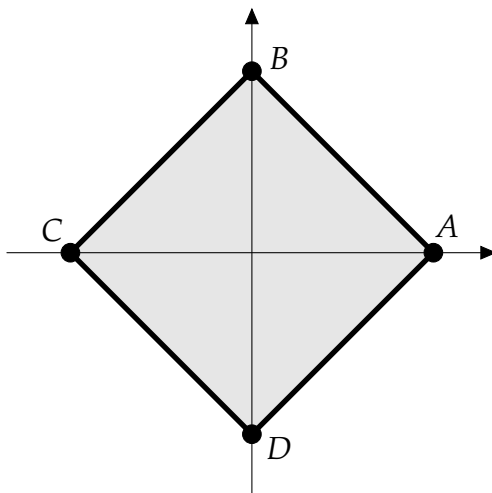
$$f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$$

na čtverci s vrcholy $A = [2, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [-2, 0]$ a $D = [0, -2]$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f , tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x, y) = 4x - 2y = 0 \quad \& \quad f_y(x, y) = -2x + 2y = 0.$$

Řešením je pouze bod $[0, 0]$ s funkční hodnotou $f(0, 0) = 0$. Protože $[0, 0] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.39: Množina M z Příkladu 3.5.13.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.39), kterou tvoří čtyři úsečky:

- (i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $y = 2 - x$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $g(x) = (2x - 2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g , tj. $g'(x) = 10x - 8 = 0$. Odtud máme $x = 4/5$, což vyhovuje omezení pro x . Proto $[4/5, 6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(4/5, 6/5) = 4/5$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(2, 0) = 8$ a $f(B) = f(0, 2) = 4$.
- (ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = x + 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $h(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g , tj. $g'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x . Proto $[0, 2]$ je

dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem B , jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části. Ještě zbývá určit funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(C) = f(-2, 0) = 8$.

- (iii) Úsečku spojující body C a D lze vyjádřit jako $y = -x - 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = (2x + 2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce m , tj. $m'(x) = 10x + 8 = 0$. Odtud máme $x = -4/5$, což vyhovuje omezení pro x . Proto $[-4/5, -6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(-4/5, -6/5) = 4/5$. Ještě vypočteme funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(D) = f(0, -2) = 4$.
- (iv) Úsečku spojující body D a A lze vyjádřit jako $y = x - 2$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $n(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce n , tj. $n'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x . Proto $[0, -2]$ je dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem D , jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části stejně jako funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky.

Celkem jsme našli 7 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = 0$ a globální maximum v bodech $[2, 0]$ a $[-2, 0]$ s hodnotou $f_{\max} = 8$. ▲

- Následně je třeba uvažovat hranici množiny S . Ta je tvořena třemi částmi (úsečkami):
 - $x = 0, y \in [0, 1], f = -2y - 3$. Do seznamu podezřelých bodů musíme přidat kraje této úsečky – tj. body $[0, 1]$ a $[0, 1]$. Funkce f nyní závisí jen na y a jde o lineární funkci, takže zřejmě nemá pro $y \in (0, 1)$ extrém (o čemž bychom se mohli přesvědčit snadným derivováním).
 - $y = 0, x \in [0, 1], f = x - 3$. Stejně jako předtím, přidáme kraje – bod $[0, 0]$ už mezi podezřelými body je, tedy pouze bod $[1, 0]$. A opět jelikož jde (v závislosti na x) o lineární funkci, tak pro $x \in (0, 1)$ nemáme extrém.
 - A konečně úsečka $y \in [0, 1], x = 1 - y, f = 1 - 3y - 3$. Oba kraje mezi podezřelými body už jsou, a opět není žádný podezřelý bod pro $y \in (0, 1)$.

Dohromady tedy máme tři podezřelé body, a sice $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$. Spočítáním funkčních hodnot dostaneme, že **maximum je $M = -2$ a nabývá se ho v bodě $[1, 0]$. Minimum je $m = -5$ a nabývá se ho v bodě $[0, 1]$.**

- b) $f(x, y) := x^2 - xy + y^2, S := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Opět jde o spojitou funkci na kompaktní množině, tedy Věta 4 zaručuje existenci minima i maxima. Zase tedy hledáme podezřelé body:

- Vnitřkem množiny S je otevřená jednotková koule (kruh). Potřebujeme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x.$$

Se vzpomínkou na Větu 4 řešíme soustavu rovnic $2x - y = 0$ a $2y - x = 0$, která má jediné řešení $x = y = 0$. A jelikož $[0, 0]$ je ve vnitřku S , máme první podezřelý bod: $[0, 0]$.

- Hranicí je jednotková kružnice, kterou si parametrizujeme pomocí

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ f(t) &= 1 - \sin t \cos t, \text{ kde} \\ t &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Do seznamu musíme přidat krajní body, to jest body odpovídající $t = 0$ a $t = 2\pi$. To je ale jen jeden bod, a sice $[1, 0]$.

Dále řešíme body na hranici pro $t \in (0, 2\pi)$. Funkce f závisí jen na t , derivujeme:

$$f'(t) = \sin^2(t) - \cos^2(t) = -\cos(2t)$$

Má-li mít funkce v bodě odpovídající nějakému t extrém, musí tam být derivace nulová. Tedy pro t dostáváme možnosti $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ a $\frac{7\pi}{4}$. To odpovídá čtveřici bodů $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. (Případně jsme mohli v rovnici $\sin^2(t) - \cos^2(t)$ dosadit zpátky za x a y , dostali bychom $x^2 = y^2$, kde $[x, y]$ leží na jednotkové kružnici.)

Celkem tedy máme 6 podezřelých bodů: $[0, 0]$, $[1, 0]$, $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dosazením do funkce f dostaneme, že

$$\mathbf{M} = \mathbf{f} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) = \mathbf{f} \left(\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) = \frac{3}{2},$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{f}([0, 0]) = 0.$$

- c) $f(x, y) := (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$, $S = \mathbb{R}^2$. Zřejmě $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, kde $g(t) = te^{-t}$. Obor hodnot funkce $x^2 + y^2$ je $[0, \infty)$. Tedy potřebujeme vyšetřit průběh funkce g na tomto intervalu – zajímají nás minima a maxima. Jednoduchým zderivováním dostaneme, že minimum má funkce g v nule ($g(0) = 0$) a maximum má v bodě 1 ($g(1) = \frac{1}{e}$).

Zbývá si rozmyslet, kdy je $x^2 + y^2$ rovno 0 a 1. Což je triviální, dostaneme tedy, že **minimum funkce f na $\mathbb{R}^2$ je 0, které se nabývá pouze v nule, a maximem je $\frac{1}{e}$ a nabývá se ho ve všech bodech kde $x^2 + y^2 = 1$, to jest na jednotkové kružnici se středem v počátku.**

- d) $f(x, y) := \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $S = \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{3}{y^2} = 1 \right\}$.

$$\mathbf{M} = \mathbf{f} \left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3} \right] \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{f} \left(\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3} \right] \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

K řešení se dá dorazit třeba vyšetřením pomocné úlohy $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} + \tilde{y}$ na množině $\tilde{S} = \{\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 \leq 1\}$. Zpátky se pak dá vrátit substitucí $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ a $\tilde{y} = \frac{1}{y}$.

Hranice množiny $\tilde{S}$ je elipsa, a lze ji parametrizovat například takto:

$$x = \cos t,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t,$$

$$t \in [0, 2\pi).$$

- e) $f(x, y, z) := (x + y + z)e^{-(x + 2y + 3z)}$, $S = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Zde množina není kompaktní, a tedy maxima ani minima se nabývat nemusí. A vskutku se ho ani nenabývá – stačí si funkci zderivovat a využít Věty 4.

Můžeme vyšetřit, kde se nabývá infima a suprema. Abychom s úlohou mohli nějak pracovat, tak je třeba se omezit na nějaký kompakt – množinu tedy uzavřeme a omezíme. Zjistíme, že uvnitř žádné podezřelé body nejsou. Nejsou dokonce ani na hraničních čtvrtrovinách. Zbývají hraniční přímky, kde nalezneme podezřelé body $[0, 0, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[0, \frac{1}{2}, 0]$ a $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Infimum je $0 = f([0, 0, 0])$ a supremum je $\frac{1}{e} = f([1, 0, 0])$.