Celkem tedy máme 6 podezřelých bodů: $[0,0]$, $[1,0]$, $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dosazením do funkce f dostaneme, že

$$\mathbf{M} = \mathbf{f}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = \mathbf{f}\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = \frac{3}{2},$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{f}([\mathbf{0},\mathbf{0}]) = \mathbf{0}.$$

1a)

c) $f(x,y) := (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $S = \mathbb{R}^2$. Zřejmě $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, kde $g(t) = te^{-t}$. Obor hodnot funkce $x^2 + y^2$ je $[0,\infty)$. Tedy potřebujeme vyšetřit průběh funkce g na tomto intervalu – zajímají nás minima a maxima. Jednoduchým zderivováním dostaneme, že minimum má funkce g v nule ($g(0) = 0$) a maximum má v bodě 1 ($g(1) = \frac{1}{e}$).

Zbývá si rozmyslet, kdy je $x^2 + y^2$ rovno 0 a 1. Což je triviální, dostaneme tedy, že **minimum funkce f na $\mathbb{R}^2$ je 0, které se nabývá pouze v nule, a maximem je $\frac{1}{e}$ a nabývá se ho ve všech bodech kde $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$, to jest na jednotkové kružnici se středem v počátku.**

d) $f(x,y) := \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $S = \{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{y^2} = 1\}$.

$$\mathbf{M} = \mathbf{f}\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3}\right]\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{f}\left(\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3}\right]\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

K řešení se dá dorazit třeba vyšetřením pomocné úlohy $f(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \widetilde{x} + \widetilde{y}$ na množině $\widetilde{S} = \{\widetilde{x}^2 + 3\widetilde{y}^2 \leq 1\}$. Zpátky se pak dá vrátit substitucí $\widetilde{x} = \frac{1}{x}$ a $\widetilde{y} = \frac{1}{y}$.

Hranice množiny $\widetilde{S}$ je elipsa, a lze ji parametrizovat například takto:

$$x = \cos t,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,$$
$$t \in [0, 2\pi).$$

e) $f(x,y,z) := (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$, $S = \{x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Zde množina není kompaktní, a tedy maxima ani minima se nabývat nemusí. A vskutku se ho ani nenabývá – stačí si funkci zderivovat a využít Věty 4.

Můžeme vyšetřit, kde se nabývá infima a suprema. Abychom s úlohou mohli nějak pracovat, tak je třeba se omezit na nějaký kompakt – množinu tedy uzavřeme a omezíme. Zjistíme, že uvnitř žádné podezřelé body nejsou. Nejsou dokonce ani na hraničních čtvrtrovinách. Zbývají hraniční přímky, kde nalezneme podezřelé body $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,\frac{1}{2},0]$ a $[0,0,\frac{1}{3}]$.

Infimum je $0 = f([0,0,0])$ a supremum je $\frac{1}{e} = f([1,0,0])$.

což je ovšem ve sporu s první rovnicí z výše uvedené soustavy. Proto $\mu \neq 0$, a tedy $y = z$. Protože $(x, y, z) \in M_2$, dostáváme $x^2 + 2y^2 = 1$ a $x^3 + 2y^3 = 0$. To splňují jedině body $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$.

Nalezli jsme tedy sedm podezřelých bodů, mezi nimiž jsou body, v nichž se nabývá extrémů. Funkční hodnoty v nich jsou 0, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\pm\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}$. Snadno zjistíme, že $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, a tudíž maximum je $1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ a $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$) a minimum je $-1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ a $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$). ■

Všimněte si, že jsme uvedené soustavy rovnic neřešili „až do konce“. Naším cílem nebylo totiž najít právě všechna řešení (což je potřebné při vyšetřování lokálních extrémů), ale jen co nejjednodušeji najít co nejmenší množinu obsahující všechna řešení. Nevadilo by nám, kdyby obsahovala několik málo bodů navíc.

§69. V případě, že nás zajímají extrémy spojité funkce na nekompaktní množině, lze někdy množinu redukovat na kompaktní pomocí vyšetření „limitního chování v nekonečnu“.

7b) <u>Příklad</u> Najděte extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Zatímco funkce f je zřejmě spojitá, množina $\mathbb{R}^2$ není kompaktní. Nicméně tvar funkce f umožňuje provést některé úvahy. Jednak je funkce f zřejmě nezáporná a nulové hodnoty nabývá jen v počátku. Proto má minimum 0. Dále můžeme usoudit, že pro body „hodně vzdálené“ od počátku budou funkční hodnoty „hodně malé“, protože „exponenciála převáží polynom“. Tyto úvahy lze zformulovat přesně. Využijme faktu, že $\lim_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$ (což ověříme například l'Hospitalovým pravidlem).

Je totiž $f(x, y) \leq 7(5x^2 + 2y^2)e^{-(5x^2+2y^2)}$ na celém $\mathbb{R}^2$. Protože $\lim_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$, existuje $R > 0$ takové, že pro $t \geq R$ platí $te^{-t} < \frac{1}{14} f(1, 1)$. Uvažme množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 5x^2 + 2y^2 \leq R\}$. Tato množina je uzavřená a omezená (jde o nějakou elipsu se středem v počátku), je tedy kompaktní. Funkce f na M tudíž nabývá svého maxima v nějakém bodě (x_0, y_0). Pokud je bod (x, y) mimo M, je $f(x, y) < \frac{1}{2} f(1, 1)$ (to plyne z volby R). Proto bod $(1, 1)$ patří do množiny M, a tedy $f(x_0, y_0) \geq f(1, 1)$. Tudíž pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ platí $f(x_0, y_0) > f(x, y)$. Proto funkce f má v bodě (x_0, y_0) maximum na $\mathbb{R}^2$.

Tím jsme ukázali, že f nabývá svého maxima na $\mathbb{R}^2$. Protože množina $\mathbb{R}^2$ je otevřená, stačí najít body, v nichž má f nulové parciální derivace prvního řádu a z nich vybrat ten, v němž je největší funkční hodnota.

Jest $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 10x(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = (14y - 4y(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$. Obě jsou nulové, právě když $2x - 10x(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14y - 4y(x^2 + 7y^2) = 0$. Jsou čtyři možnosti:

(i) $x = 0$ a $y = 0$ – tím dostaneme již známý bod minima $(0,0)$.

(ii) $x = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – odtud dostaneme dva body $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. V obou je hodnota f rovna $\frac{7}{2e}$.

(iii) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $y = 0$ – odtud dostaneme dva body $(1/\sqrt{5}, 0)$ a $(-1/\sqrt{5}, 0)$. V obou je hodnota f rovna $\frac{1}{5e}$.

(iv) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – tento případ však nemůže nastat, protože výraz $x^2 + 7y^2$ nemůže být zároveň $1/5$ i $7/2$.

Nyní porovnáním výsledků dostaneme, že funkce f nabývá maxima $\frac{7}{2e}$ v bodech $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. ■

§70. Pokud funkce extrémů nenabývá, nebo alespoň nevíme předem, zda nabývá, hledáme supremum a infimum. Přitom nám někdy může pomoci následující pozorování.

Nechť funkce f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ *a* $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Toto se hodí například v případě, že množina M je omezená. Pak totiž její uzávěr je kompaktní, a je-li f na $\overline{M}$ spojitá, pak můžeme na $\overline{M}$ najít extrémy, a tím určíme supremum a infimum na M.

P ř í k l a d   Najděte supremum a infimum funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$. Existuje minimum a maximum funkce f na M?

Řešení. Množina M je otevřená a f má všude na M parciální derivace. Pokud tedy má f extrém v nějakém bodě M, musí v něm být parciální derivace prvního řádu nulové, tj. $\cos x = 0$ a $\cos y = 0$. To splňují body tvaru $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Žádný z těchto bodů ovšem v M neleží. Proto f na M extrémů nenabývá.

Nicméně funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a $\overline{M}$ je kompaktní (M je otevřený kruh o středu 0 a poloměru $\pi/2$, $\overline{M}$ je příslušný uzavřený kruh). Proto f nabývá extrémů na $\overline{M}$. Protože v M extrémy nemá, nabývá jich na hranici, tj. na množině $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = \pi^2/4\}$. (Jelikož M je otevřená, je $\partial M = \overline{M} \setminus M$.) To je kružnice, a tedy bychom ji mohli parametrizovat jako v §67. Tento postup necháváme na čtenáři, zde použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů z §68.

Funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 - \pi^2/4$ je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, její parciální derivace jsou $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Obě jsou nulové pouze v bodě $(0,0)$, který neleží v ∂M. Proto, má-li funkce f v nějakém bodě ∂M lokální extrém (vzhledem k ∂M), existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které platí:

$$\begin{aligned} \cos x + \lambda \cdot 2x &= 0, \\ \cos y + \lambda \cdot 2y &= 0, \\ x^2 + y^2 - \pi^2/4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme, že $y \cos x - x \cos y = 0$. Všimněme si, že nemůže být $x = 0$ ani $y = 0$. Jinak by totiž nebyla splněna první nebo druhá rovnice. Proto všechna (x, y, z) různá od bodů (39) je $|f(x, y, z)| < U$), stačí najít kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^3$, která obsahuje všech 15 stacionárních bodů uvnitř, přičemž

$$(x, y, z) \in \partial K \cup (\mathbb{R}^3 - K) \Rightarrow |f(x, y, z)| < U\,. \tag{43}$$

Funkce $g(r)$ je kladná v $\mathbb{R}_+$ a má derivaci $g'(r) = 3r^2(3-2r^2)\exp(-r^2)$ zápornou všude v intervalu $(\sqrt{3/2}\,, +\infty)$, takže tam klesá. Z nerovností $|f(x, y, z)| \le g(r)$, $e^3 > 20$ plyne, že

$$g(3) = \frac{3^4}{e^9} < \frac{100}{20^3} = \frac{1}{80} = 0.0125 < U\,;$$

za K tedy stačí zvolit uzavřenou kouli $\overline{U((0, 0, 0), 3)}$.

12)

Příklad 17.8. Funkce f třídy C_∞ definovaná rovností

$$f(x, y) := 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3} \quad \text{v} \quad X := \mathbb{R}_+^2 \tag{44}$$

je nezáporná a shora neomezená. Jediným společným řešením rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - \frac{8y}{x^3} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4} = 0 \tag{45}$$

v X je bod $(x, y) = (2, 3)$, přičemž $f(2, 3) = 10$. Tvrdíme, že *f má v bodě $(2, 3)$ minimum*.

Abychom to dokázali, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ obsahující bod $(2, 3)$ uvnitř a splňující podmínku

$$(x, y) \in X - \operatorname{int} K \Rightarrow f(x, y) > 10\,. \tag{46}$$

Uvažme především, že všechny tři sčítance na pravé straně (44) jsou v X kladné, takže $f(x, y)$ je větší než kterýkoli z nich. Uvažme konkrétněji, že

1) $f(x, y) > 3x \ge 10$, je-li $x \ge 4$;[5]

2) $0 < x \le 4 \Rightarrow f(x, y) > 4y/x^2 \ge \frac{1}{4}y \ge 10$ pro všechna $y \ge 40$;

3) $f(x, y) > 27/y^3 \ge 10$, je-li $y^3 \le 2.7$, tedy jistě pro všechna $y \in (0, 1\rangle$;

4) $y \ge 1 \Rightarrow f(x, y) > 4y/x^2 \ge 4/x^2 \ge 10$, je-li $x^2 < \frac{2}{5}$, tedy jistě pro $x \in (0, \frac{3}{5}\rangle$ (protože $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \frac{2}{5}$).

Z 1)−4) je patrné, že stačí položit

$$K := \langle \tfrac{3}{5}, 4\rangle \times \langle 1, 40\rangle\,. \tag{47}$$

* * *

[5]) Místo „4“ bychom samozřejmě mohli napsat „10/3“, ale pro jednoduchost dalších výpočtů i zápisu se vyhýbáme zbytečným zlomkům. Je zřejmé, že při hledání množiny K máme značnou volnost, a to nejen v tomto konkrétním případě. Je-li (v obecném případě) $a \in X$ jediný bod, pro nějž je $A := \min f(X) = f(a)$, splňuje *každá* kompaktní množina $K \subset X$, obsahující bod a uvnitř, podmínku $x \in X - \operatorname{int} K \Rightarrow f(x) > A$. Hlavním kritériem pro výběr množiny K je proto *jednoduchost ověření této podmínky za situace, kdy existenci minima teprve dokazujeme*.

Tedy pokud $g'(x) = 0$, pak $x = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Máme tedy podezřelé body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Zahrneme ještě do úvahy krajní body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.

Při vyšetřování f na M_2 nám vyjdou body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodem zjistíme, že

$$\min f(M) = f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$
$$\max f(M) = f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

♣

11.8.40. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \quad M = \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Množina M není omezená. Vzhledem k tomu, že

$$f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,$$

nabývá f svého minima $\min f(M) = -14$ v bodě $[-1, -2, 3]$. Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} f(n, -2, 3) = \infty,$$

supremum f na M je rovno ∞. ♣

1d)

11.8.41. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 x > 0, y > 0, z > 0\right\}.$$

Řešení. Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$ a $\overline{M} = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$. Ze spojitosti f na $\mathbb{R}^3$ plyne rovnost $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Vyšetříme nejprve body podezřelé z extrému, které leží v $\operatorname{Int} \overline{M} = M$. V Těchto bodech musí být $\nabla f(x, y, z) = o$, tj.

$$e^{-(x+2y+3z)}\,[1 - (x+y+z), 1 - 2(x+y+z), 1 - 3(x+y+z)] = o.$$

Tato soustava však nemá řešení, a tedy v M žádný bod podezřelý z extrému neleží.

Uvažujme nyní jednu ze „stěn“ tvořící ∂M, například

$$M_1 = \{[x, y, 0];\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Pak máme funkci $g(x, y) = f(x, y, 0) = (x + y)e^{-(x+2y)}$ na $N = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$. Jako výše dostaneme, že g nemá v $\operatorname{Int} N$ podezřelý bod. Musíme tedy uvažovat $\partial N = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{[x, 0];\ x \geq 0\}, \quad N_2 = \{[0, y];\ y \geq 0\}.$$

Funkce $h(x) = g(x, 0) = xe^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, má bod podezřelý z extrému v 0 a v bodě, kde $h'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$, tj. v $x = 1$. Dostáváme tak body

$$[0, 0, 0], [1, 0, 0].$$

V množině N_2 dostáváme další podezřelý bod $[0, \frac{1}{2}, 0]$. Tím máme vyřešenu otázku množiny N.

Zbývající stěny tvořící ∂M poskytnou bod $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Funkce f je zjevně nezáporná na $\overline{M}$, tedy

$$\in f(M) = \min f(\overline{M}) = f(0,0,0) = 0.$$

Zbývá dokázat, že

$$\sup f(M) = \max f(\overline{M}) = f(1,0,0) = e^{-1}.$$

K tomuto účelu uvažujme odhad

$$f(x,y,z) \leq \frac{x+y+z}{e^{x+y+z}}, \quad [x,y,z] \in \overline{M}. \tag{11.35}$$

Jelikož $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{e^r} = 0$, existuje $r > 1$ takové, že $\frac{r}{e^r} < e^{-1}$. Uvažujme množinu

$$K = \left\{[x,y,z] \in \overline{M};\ x+y+z \leq r\right\}.$$

Pak K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f tedy nabývá na K svého maxima, přičemž z výpočtů výše a (11.35) plyne, že $\max f(K) = f(1,0,0)$. Díky (11.35) dále máme, že $\max f(K) = \max f(\overline{A})$. Tím je důkaz dokončen. ♣

11.8.42. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M, kde

$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z, \quad M = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1].$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$. Proto nabývá na M svých extrémů. Pokud $x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ splňují $z_1 < z_2$, pak $f(x,y,z_1) < f(x,y,z_2)$. Tedy f nabývá své maximum na $M_1 = [-1,1] \times [-1,1] \times \{1\}$ a minimum na $M_2 = [-1,1] \times [-1,1] \times \{-1\}$.

K určení maxima tak vyšetřujeme maximum funkce $g(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1$ na množině $[-1,1] \times [-1,1]$. Jelikož $g(x,y) = 2\operatorname{dist}([x,y],0)^2 + 1$, vidíme, že body v $[-1,1] \times [-1,1]$ nejvzdálenější od počátku jsou $[1,1], [-1,1], [-1,-1], [1,-1]$.

Podobně postupujeme při hledání minima a dospějeme k bodu $[0,0]$. Tedy

$$\begin{aligned}
&\min f(M) = f(0,0,-1) = -1,\\
&\max f(M) = f(1,1,1) = f(1,-1,1) = f(-1,-1,1) = f(-1,1,1) = 5.
\end{aligned}$$

♣

11.8.43. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M, kde

$$f(x,y) = x + y, \quad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená. Díky Příkladu 11.8.29 víme, že M je omezená a tedy je kompaktní. Funkce f je spojitá, a tedy nabývá na M svých extrémů. Použijeme Větu 11.5.8 pro $G = \mathbb{R}^2$, $m = 1$ a $g(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Platí

$$\nabla g(x,y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x),$$

$$f\Big(-\frac{1}{a}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{1}{b}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big) = -\frac{1}{a^2}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{b^2}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}.$$

Protože M je kompaktní a funkce f je spojitá, musí nabývat na M svého minima i maxima. Protože podezřelé body jsou pouze dva, v jednom z nich se nabývá maxima a ve druhém minima. Hodnota v bodě $(\frac{1}{a}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{1}{b}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}})$ je kladná, jde tudíž o maximum, hodnota v bodě $(-\frac{1}{a}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{1}{b}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}})$ je záporná, jde tudíž o minimum.[6] □

Úloha I.95. $f(x,y) = x^2 + y^2$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.96. $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.97. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 25\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.98. $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = \frac{\pi}{4}\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.99. $f(x,y,z) = x - 2y - 2z$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

2a

Řešení metodou multiplikátorů. Rovnici vazby můžeme psát ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Označíme-li $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, lze vazebnou podmínku psát ve tvaru

$$g(x,y,z) = 0,$$

což znamená totéž jako rovnost $M = g^{-1}(0)$. Množina M je tedy uzavřená. Protože je zároveň omezená, neboť $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ určuje sféru se středem v počátku o poloměru 1, je M kompaktní.

Funkce f i funkce g jsou polynomy, jsou tedy nekonečněkrát diferencovatelné, tudíž třídy C^1 na $\mathbb{R}^3$. Jako otevřenou množinu G z věty o multiplikátorech (s jednou vazbou) lze tedy volit $G = \mathbb{R}^3$. Věta o multiplikátorech s jednou vazbou potom říká, že vázaný extrém vzhledem k množině $M = g^{-1}(0)$ může mít funkce f pouze v těch bodech vazby, kde má funkce g nulový gradient nebo v bodech (x,y,z), pro které existuje reálné číslo λ takové, že soustava rovnic o čtyřech neznámých x, y, z, λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

má řešení (x,y,z,λ).

Vyšetřeme nejprve body, kde má vazebná funkce g nulový gradient. Protože

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right),$$

kde

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 2x + 0 + 0 - 0 = 2x,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 0 + 2y + 0 - 0 = 2y,$$

[6]) Není těžké ověřit, že obě řešení úlohy dávají de facto stejný výsledek.

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 0 + 0 + 2z - 0 = 2z,$$

máme, že

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z).$$

Vektor $(2x, 2y, 2z)$ je nulovým vektorem $(0,0,0)$ pouze v bodě $x = 0, y = 0, z = 0$, který ale není bodem vazby, neboť $g(0,0,0) = 0^2 + 0^2 + 0^2 - 1 = -1 \neq 0$. Tento případ nám tedy nedává žádný podezřelý bod.
Vyšetřeme nyní výše uvedenou soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &= 0\\
g(x, y, z) &= 0
\end{aligned}$$

Parciální derivace vazebné funkce g už jsme vypočetli výše. Parciální derivace funkce f jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2y - 2z) = 1 - 0 - 0 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x - 2y - 2z) = 0 - 2 - 0 = -2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x - 2y - 2z) = 0 - 0 - 2 = -2,$$

zmíněná soustava rovnic má tedy tvar

$$\begin{aligned}
1 + \lambda \cdot 2x &= 0\\
-2 + \lambda \cdot 2y &= 0\\
-2 + \lambda \cdot 2z &= 0\\
x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic můžeme vyjádřit, že

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

a dosazením do poslední rovnice (vazby) dostaneme, že

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 1 = 0,$$

odkud vyplývá, že

$$\lambda^2 = \frac{9}{4} \implies \lambda_{1,2} = \pm\frac{3}{2}.$$

Po dosazení do výrazů pro x, y, z dostáváme dva podezřelé body $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$. Funkční hodnoty v nich jsou

$$f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3,$$

$$f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3.$$

Protože funkce f je spojitá a M kompaktní, musí f na M nabývat svého maxima i minima a to v některém ze dvou bodů výše. Zjevně tedy v bodě $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ nabývá minima -3 a v bodě $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ maxima 3. □

Úloha I.100. $f(x,y,z) = x^m y^n z^p$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = a\}$, kde $m, n, p, a > 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.101. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, kde $a > b > c > 0$.

2) Úlohu můžeme také řešit jednoznačným vyjádřením proměnné y z rovnice vazby $x^2 - y = 0$. Tím získáváme $y = x^2$, které dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$, dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = 4 \ln x^2 - x.$$

Zadanou úlohu jsme tedy převedli na úlohu hledání extrémů funkce jedné proměnné. Platí

$$F'(x) = \frac{8}{x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

Spočtením druhé derivace $F''(x) = -\frac{8}{x^2}$ a dosazením bodu $x = 8$ získáváme hodnotu $F''(8) = -\frac{1}{8} < 0$. Protože je druhá derivace v bodě $x = 8$ záporná, má funkce F v tomto bodě lokální maximum. Dopočítáme $y = 64$. Odtud funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ má v bodě $[8, 64]$ vázané lokální maximum.

(2b) **Příklad 9.6.** Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit třemi způsoby.
1) Metoda Lagrangeových multiplikátorů. Vazba je $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x, 2y)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že $x = y = 0$. Tyto hodnoty však nevyhovují vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + 2x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(1 + \lambda) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \ \vee \ \lambda = -1 \\ L_y &= 1 + 2y\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y\lambda = -1 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme nejdříve $x = 0$ a dostáváme $y = \pm 1$. Máme tedy stacionární body $x_1^* = [0, 1]$ s příslušnou hodnotou $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a $x_2^* = [0, -1]$ s hodnotou $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dále do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme za $y = -\frac{1}{2\lambda}$ a $\lambda = -1$. Dostaneme $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Získali jsme další dva stacionární body $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$

pro hodnotu $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -1, \quad L''(x_3^*) = L''(x_4^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Nejdříve vyšetříme body $x_1^* = [0, 1]$ a $x_2^* = [0, -1]$. Dostáváme $G(x_1^*) = (0, 2) = -G(x_2^*)$ a

$$\langle G(x_1^*), h \rangle = 2h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 0, \ \text{tj. } h = (t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Pro x_2^* má h splňující podmínku (9.3) stejný tvar. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h \rangle = (t, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Podobně pro bod x_2^*.

$$\langle L''(x_2^*)h, h \rangle = (t, 0) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = 3t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Dále vyšetříme bod $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$. Dostáváme $G(x_3^*) = (\sqrt{3}, 1)$ a

$$\langle G(x_3^*), h \rangle = \sqrt{3}h_1 + h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = -\sqrt{3}h_1, \quad \text{tj. } h = \big(t, -\sqrt{3}t\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\langle L''(x_3^*)h, h \rangle = \big(t, -\sqrt{3}t\big) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{3}t \end{pmatrix} = -6t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_3^* je podle věty 9.3 lokální maximum.
Podobně pro bod $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$. $G(x_4^*) = (-\sqrt{3}, 1)$ a

$$\langle G(x_4^*), h \rangle = \sqrt{3}h_1 + h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \sqrt{3}h_1, \quad \text{tj. } h = \big(t, \sqrt{3}t\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\langle L''(x_4^*)h, h\rangle = \left(t, \sqrt{3}t\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix} = -6t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_4^* je podle věty 9.3 lokální maximum.

2) Jiný způsob řešení úlohy spočívá v jednoznačném vyjádření proměnné y z vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, tj. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Úloha se tedy rozpadá na dvě části.
(1) Budeme uvažovat $y = \sqrt{1 - x^2}$. Tento vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \sqrt{1 - x^2}) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Nyní hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \ \Rightarrow x_1 = 0, \ \ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

postupně dosadíme stacionární body. Tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad F''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum,} \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = 1 \Rightarrow [0, 1] \text{ vázané lokální minimum,} \\
x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum,} \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = \tfrac{1}{2} \Rightarrow [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}] \text{ vázané lokální maximum,} \\
x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum,} \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = \tfrac{1}{2} \Rightarrow [-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}] \text{ vázané lokální maximum.}
\end{aligned}$$

(2) Budeme uvažovat $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, -\sqrt{1 - x^2}) = x^2 - \sqrt{1 - x^2}.$$

Hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \ \Rightarrow x_4 = 0.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

dosadíme za x bod $x_4 = 0$. Dostáváme $F''(0) = 1 > 0$, tedy jedná se o lokální minimum. Dopočteme $y = -1$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[0, -1]$ vázané lokální minimum.

3) Další možností jak úlohu řešit je pomocí parametrizace. Vazba je jednotková kružnice, tudíž můžeme pro parametrizaci použít polární souřadnice s poloměrem $r = 1$, pak $x = \cos t$, $y = \sin t$ pro $t \in (0, 2\pi]$. Polární souřadnice dosadíme do zadané funkce f a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t.$$

Ve výpočtu pokračujeme dál jako při hledání extrémů funkce jedné proměnné.

$$F' = -2\cos t \sin t + \cos t = 0 \ \Rightarrow \cos t = 0 \ \vee \ \sin t = \frac{1}{2}.$$

Z první rovnosti $\cos t = 0$ dostáváme stacionární body $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Z druhé rovnosti $\sin t = \frac{1}{2}$ máme stacionární body $t_3 = \frac{\pi}{6}$, $t_4 = \frac{5\pi}{6}$. Tyto body nyní dosadíme do druhé derivace

$$F''(t) = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t - \sin t.$$

Tedy v bodě

$$\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_1) = 1 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum},\\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_2) = 3 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum},\\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_3) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum},\\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_3) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}.
\end{aligned}$$

Parametrizací se vrátíme zpět k proměnným x, y a dostáváme

$$\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_1 = 0, \;\; y = \sin t_1 = 1,\\
&\Rightarrow \quad [0,1] \text{ vázané lokální minimum},\\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_2 = 0, \;\; y = \sin t_2 = -1,\\
&\Rightarrow \quad [0,-1] \text{ vázané lokální minimum},\\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; y = \sin t_3 = \frac{1}{2},\\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum},\\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; y = \sin t_4 = \frac{1}{2},\\
&\Rightarrow \quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}.
\end{aligned}$$

Příklad 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x - y + 3z$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení. Příklad budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$. Hodnost matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (2x, 2y, 8z)$ je různá od 1 pouze v nulovém bodě, který však nevyhovuje vazebné podmínce. Píšeme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda) = x - y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned}
L_x = 1 + 2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda}\\
L_y = -1 + 2y\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2\lambda}\\
L_z = 3 + 8z\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = -\frac{3}{8\lambda}.
\end{aligned}$$

Vyjádřené x, y, z dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ a dostáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$, tj. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}$. Tomu odpovídají stacionární body

platí
$$\langle L''(x^*)h, h\rangle > 0, \tag{9.4}$$
má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum vzhledem k M. Jestliže pro všechna nenulová $h \in \mathbb{R}^n$ splňující podmínku (9.3) platí
$$\langle L''(x^*)h, h\rangle < 0, \tag{9.5}$$
má funkce f v bodě x^* ostré lokální maximum vzhledem k M.

Na základě věty 9.2 a věty 9.3 zformulujeme návod, jak postupovat při hledání vázaných extrémů funkcí se spojitými druhými derivacemi:
1) Zapíšeme vazebné rovnice ve tvaru $g_k(x) = 0$, $k = 1, \dots, m$ a určíme hodnost matice G.
2) Vytvoříme Lagrangeovu funkci L a určíme stacionární body funkce f vzhledem k M.
3) Spočteme druhou derivaci Lagrangeovy fukce L ve stacionárních bodech.
4) Určíme $h \in \mathbb{R}^n$.
5) Vyšetříme definitnost kvadratické formy $\langle L''(x^*)h, h\rangle$.

9.2 Řešené příklady

Řc

Příklad 9.4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ na množině M určené rovností $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x-2, 2y-4)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že
$$2x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad 2y - 4 = 0 \;\Rightarrow\; y = 2.$$
Bod $[1, 2]$ však nevyhovuje vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci
$$L(x, y, \lambda) = 4x + 3y - 4 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 1),$$
spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,
$$L_x = 4 + 2\lambda(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 = -\frac{2}{\lambda}$$
$$L_y = 3 + 2\lambda(y-2) = 0 \;\Rightarrow\; y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}.$$

2c

Dosazením vyjádřených hodnot $x-1$, $y-2$ do rovnice vazby dostáváme

$$\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}.$$

Pro $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ dopočítáme $x_1 = \frac{9}{5}$, $y_1 = \frac{13}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_1^* = [\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$. Pro $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ dopočítáme $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{7}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_2^* = [\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$.

Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x_1^* = [\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = \left\langle \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right), (h_1, h_2)\right\rangle = \frac{8}{5}h_1 + \frac{6}{5}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -\frac{3}{4}h_2,$$

tj. $h = \left(-\frac{3}{4}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = \left(-\frac{3}{4}t, t\right) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = -\frac{125}{16}t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.3 lokální maximum.

Podobně pro bod $x_2^* = [\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ dostáváme $G(x_2^*) = (-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ a

$$\langle G(x_2^*), h\rangle = \left\langle \left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right), (h_1, h_2)\right\rangle = -\frac{8}{5}h_1 - \frac{6}{5}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -\frac{3}{4}h_2,$$

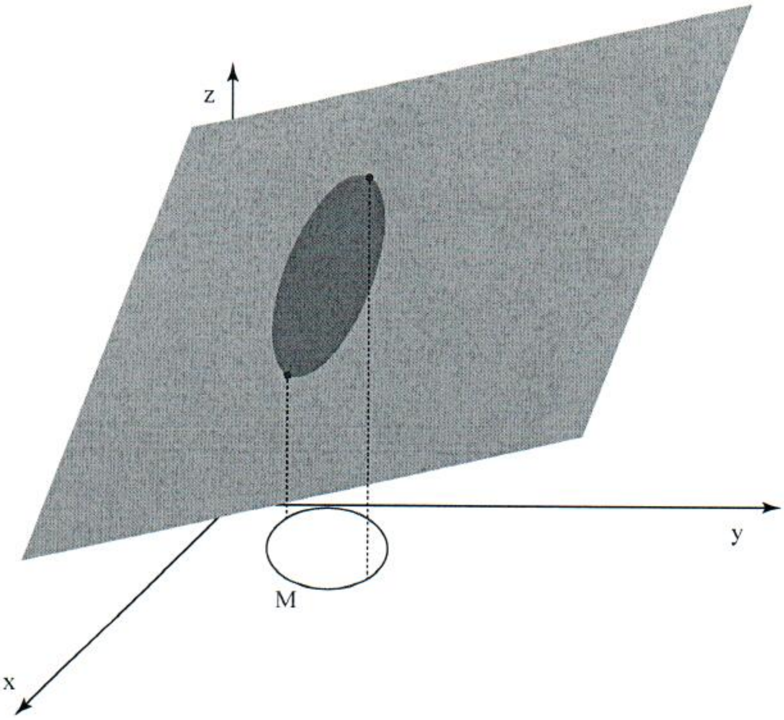
tj. $h = \left(-\frac{3}{4}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = \left(-\frac{3}{4}t, t\right) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{125}{16}t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.3 lokální minimum.

Vysvětleme si geometrický význam úlohy. Grafem funkce $f(x, y) = 4x+3y-4$

je rovina. Vazebná rovnice $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ je rovnice kružnice se středem v bodě $S=[1,2]$, poloměrem $r=1$ ležící v rovině xy. Hledáme tedy extrémy v bodech kružnice. z-ové souřadnice těchto bodů, tj. funkční hodnoty odpovídající bodům kružnice, leží na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na obrázku 13.



Obrázek 13: Maximum a minimum funkce f na množině M

Příklad 9.5. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y)=4\ln y-x$ vzhledem k podmínce $x^2=y$.

Řešení. Úlohu vyřešíme dvěma způsoby.
1) Nejdříve úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x,y)=x^2-y$. Matice $G=(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y})=(2x,-1)$ má hodnost 1. Sestavíme

Parametrizací se vrátíme zpět k proměnným x, y a dostáváme

$$\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_1 = 0, \quad y = \sin t_1 = 1, \\
&\Rightarrow \quad [0, 1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_2 = 0, \quad y = \sin t_2 = -1, \\
&\Rightarrow \quad [0, -1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \sin t_3 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}, \\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \sin t_4 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}.
\end{aligned}$$

2d)

Příklad 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x - y + 3z$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení. Příklad budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$. Hodnost matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (2x, 2y, 8z)$ je různá od 1 pouze v nulovém bodě, který však nevyhovuje vazebné podmínce. Píšeme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda) = x - y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned}
L_x = 1 + 2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda} \\
L_y = -1 + 2y\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2\lambda} \\
L_z = 3 + 8z\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = -\frac{3}{8\lambda}.
\end{aligned}$$

Vyjádřené x, y, z dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ a dostáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$, tj. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}$. Tomu odpovídají stacionární body

2d $x_1^* = [-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$, $x_2^* = [\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$. Vyjádříme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body x_1^*, x_2^* a jim příslušnou hodnotu λ_1, resp. λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2, h_3)$ splňující podmínku (9.3).
Pro bod $x_1^* = [-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (-\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{24}{\sqrt{17}})$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = -\frac{8}{\sqrt{17}}h_1 + \frac{8}{\sqrt{17}}h_2 - \frac{24}{\sqrt{17}}h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 + 3h_3,$$

tj. $h = (t, t+3p, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = (t, t+3p, p) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t+3p \\ p \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{17}\,t^2 + \frac{13}{4}\sqrt{17}\,p^2 + \frac{3}{2}\sqrt{17}\,pt.$$

To je kvadratická forma kladně definitní, takže v bodě x_1^* nastává ostré lokální minimum.
Pro bod $x_2^* = [\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$ dostáváme $G(x_2^*) = (\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{24}{\sqrt{17}})$ a

$$\langle G(x_2^*), h\rangle = \frac{8}{\sqrt{17}}h_1 - \frac{8}{\sqrt{17}}h_2 + \frac{24}{\sqrt{17}}h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 + 3h_3,$$

tj. $h=(t,t+3p,p)$, $t,p\in\mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h,h\rangle=(t,t+3p,p)\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{17}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ t+3p\\ p\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{17}\,t^2-\frac{13}{4}\sqrt{17}\,p^2-\frac{3}{2}\sqrt{17}\,pt.$$

To je kvadratická forma negativně definitní, takže v bodě x_2^* nastává ostré lokální maximum.

2e

Příklad 9.8. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z)=x+2y+3z$ na množině určené rovnicemi $x-y+z=1$, $x^2+y^2=1$.

Řešení. Příklad vyřešíme dvěma způsoby.

1) Nejprve budeme úlohu řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbami $g_1(x,y,z)=x-y+z-1=0$, $g_2(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Matice $G=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2x & 2y & 0\end{pmatrix}$ má hodnost 2. Matice nabývá hodnosti 1 pro $x=y=0$, ale tyto hodnoty nesplňují vazební podmínku g_2. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x+2y+3z+\lambda_1(x-y+z-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$L_x=1+\lambda_1+2x\lambda_2=0\ \Rightarrow\ x=-\frac{1+\lambda_1}{2\lambda_2}$$
$$L_y=2-\lambda_1+2y\lambda_2=0\ \Rightarrow\ y=\frac{\lambda_1-2}{2\lambda_2}$$
$$L_z=3+\lambda_1=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=-3.$$

Do vyjádřených x a y dosadíme hodnotu $\lambda_1=-3$ a získáváme, že $x=\frac{1}{\lambda_2}$, $y=-\frac{5}{2\lambda_2}$. Takto vyjádřené x, y dosadíme do rovnice vazby $x^2+y^2=1$ a dostáváme $\lambda_2=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, tj. $\lambda_{21}=\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\lambda_{22}=-\frac{\sqrt{29}}{2}$. Stacionární body jsou $x_1^*=[\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}}]$, $x_2^*=[-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}}]$. Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L''=\begin{pmatrix}L_{xx} & L_{xy} & L_{xz}\\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz}\\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(2f)

Příklad 13. Zjistěte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ vzhledem k množině vymezené rovnicí $2x + 6y = 20$.

Řešení. Rovnice $2x + 6y = 20$ je vazební podmínkou, převedeme ji tedy do tvaru $g(x, y) = 0$. Dostaneme

$$2x + 6y - 20 = 0.$$

Nyní vypočítáme gradienty f a g

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \quad \text{a} \quad \nabla g(x, y) = (2{,}6).$$

V dalším kroku musíme najít bod $[x_0, y_0]$ pro který platí

$$(2x_0, 2y_0) = \lambda \cdot (2{,}6),$$

tedy

$$2x_0 = \lambda \cdot 2 \quad \text{a} \quad 2y_0 = \lambda \cdot 6.$$

Z první rovnice vyjádříme λ, konkrétně $\lambda = x_0$, dosadíme do druhé rovnice a upravíme.

$$2y_0 = 6x_0$$
$$\Rightarrow \; y_0 = 3x_0$$

Navíc musí bod (x_0, y_0) splňovat $g(x_0, y_0) = 0$, proto

$$2x_0 + 18x_0 - 20 = 0$$
$$\Rightarrow x_0 = 1$$
$$\Rightarrow y_0 = 3.$$

Dostali jsme tedy jediný podezřelý bod $[1, 3]$.
Podobně bychom mohli nejprve zapsat Lagrangeovu funkci

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (2x + 6y - 20),$$

zjistit její gradient a položit ho rovný nulovému vektoru $\vec{o}$

$$\nabla L(x, y) = (2x - 2\lambda, 2y - 6\lambda) = (0, 0).$$

Opět už pouze stačí dopočítat body $[x_0, y_0]$, pro které je rovnost splněna a pro které zároveň platí $g(x_0, y_0) = 0$. Extrém funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ vzhledem k množině vymezené rovnicí $2x + 6y = 20$ může nastávat pouze v bodě $[1, 3]$.

Víme již tedy jak pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů odhalit body, ve kterých může mít funkce vázaný extrém vzhledem k nějaké množině. Těmto bodům říkáme, podobně jako u funkcí jedné proměnné, body podezřelé z extrému, nebo prostě jen podezřelé body. V odborné literatuře se pak častěji setkáme s pojmem stacionární body. Podeřelé jim říkáme z toho důvodu, že ne v každém takovém bodě extrém skutečně nastává. Už dříve, při vyšetřování absolutních a lokálních extrémů funkce dvou proměnných, jsme si řekli, že pro ověření, zda v podezřelém bodě skutečně extrém nastává, můžeme využít matici druhých parciálních derivací. Podobné to bude i zde. Rozdíl ovšem může nastat v tzv. sedlových bodech. V nich sice funkce dvou proměnných nemá extrém vzhledem ke svému definičnímu oboru, ovšem extrém vzhledem k nějaké množině zde nastat může. Například pokud bychom šli z vrcholku jednoho kopce na vrchol druhého přes sedlový bod, právě v tomto bodě bychom byli v nejnižší nadmořské výšce během naší cesty.

Postačující podmínku existence extrému v jistém bodě si odvodíme v následující části.

sféře v $\mathbb{R}^3$, můžeme z rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vypočítat např. z a hledat extrémy funkcí

$$g_\pm(x,y) := f(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2}) \ \text{ v kruhu } \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\};$$

lze též přejít ke sférickým souřadnicím, tedy k funkci

$$h(\varphi,\vartheta) := f(\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta) \ \text{ v intervalu } \ \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle.$$

Jindy se hodí např. cylindrické nebo jiné křivočaré souřadnice; vždy jde o to, abychom transformací souřadnic získali z f co nejjednodušší funkci.

Právě uvedené poznámky měly naznačit, že při hledání extrémů funkcí na varietách nejsme odkázáni jen na V. 17.3 a že je vhodné pokusit se předem odhadnout, která metoda povede v daném případě k cíli snadněji; protože záleží na specifických vlastnostech příslušné funkce a variety, obecná konkrétnější rada neexistuje. □

Věta 17.3 podává jistou *nutnou* podmínku, kterou musí splňovat každý bod $x \in V$, v němž má $f\,|\,V$ maximum nebo minimum; najdeme-li tedy všechna společná řešení $x = (x_1, \ldots, x_q)$ rovnic (50) – (51), budou mezi nalezenými řešeními všechny body, v nichž má $f\,|\,V$ extrém. [7] Čísla λ_i, která se v této souvislosti nazývají **Lagrangeovy neurčité koeficienty**, mají jen pomocný charakter. Není nutné je počítat (i když se tomu někdy nevyhneme); spíše se snažíme co nejrychleji je eliminovat. Protože soustava $(p+q)$ rovnic (50) – (51) je obecně nelineární a rovnice nemusí být dokonce ani algebraické, může být její řešení značně netriviální, ne-li nepřekonatelný problém. □

Uveďme dva příklady vázaných extrémů:

2g

Příklad 17.9. Hledejme extrémy funkce $f(x,y) := x^2 + y^2$ na nulové hladině V funkce

$$F(x,y) := 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4. \tag{52}$$

Geometrický smysl úlohy: Vhodným otočením souřadnicových os bychom se mohli zbavit „smíšeného členu“ $6xy$, což by ihned prozradilo, že $V = F_{-1}(0)$ je elipsa o středu v počátku. Vzhledem k tomu, že $f(x,y)$ je čtverec vzdálenosti bodu (x,y) od počátku, máme zjistit (bez otáčení os), které její body jsou nejméně a nejvíce vzdálené od počátku; tím zároveň určíme délku a polohu jejích poloos. [8])

Ověření předpokladů věty 17.3 nečiní potíže: Protože např. $F(2/\sqrt{5}, 0) = 0$, je $V \ne \emptyset$; funkce f a F jsou třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a V je varieta, protože obě derivace

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 10x - 6y, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -6x + 10y \tag{53}$$

se anulují jen v počátku, který ve V zřejmě neleží.

[7]) Ještě jednou však zdůrazněme, že věta 17.3 existenci extrémů nezaručuje.

[8]) Náš další postup bude samozřejmě na těchto geometrických představách nezávislý.

29

Jakožto vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení F je množina V uzavřená. Z rovnosti $F(x,y)=0$ plyne, že $5(x^2+y^2)=4+6xy\le 4+3(x^2+y^2)$, takže nerovnost $2(x^2+y^2)\le 4$ platí pro všechny body $(x,y)\in V$; to dokazuje, že varieta V je omezená. V je tedy kompaktní a existence minima i maxima množiny $f(V)$ je zaručena.

Podle V. 17.3 máme najít všechny body $(x,y)\in V$, k nimž existuje $\lambda\in\mathbb{R}$ tak, že

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0; \tag{54}$$

tyto rovnice lze po dosazení $\partial f/\partial x=2x$, $\partial f/\partial y=2y$ upravit na tvar

$$(5\lambda+1)x=3\lambda y,\quad (5\lambda+1)y=3\lambda x. \tag{55}$$

Protože nemůže být $\lambda=0=5\lambda+1$, je z těchto rovnic patrné, že 1) $xy=0\Rightarrow x=y=0$; 2) $(\lambda=0)\vee(5\lambda+1=0)\Rightarrow x=y=0$; protože bod $(0,0)$ ve V neleží, plyne z toho, že všechna čtyři čísla λ, $5\lambda+1$, x, y jsou nenulová.

Dělením první rovnice v (55) druhou z nich získáme rovnost $x/y=y/x$ neboli $y^2=x^2$ neboli $y=\pm x$. Dosadíme-li $y=x$ (resp. $y=-x$) do rovnice $F(x,y)=0$, dostaneme rovnici $4x^2=4$ (resp. $16x^2=4$), která má řešení $x=\pm1$ (resp. $x=\pm\frac12$). Všechny body, v nichž funkce $f\,|\,V$ nabývá minima nebo maxima, leží tedy v množině $\{(1,1),\ (-1,-1),\ (\frac12,-\frac12),\ (-\frac12,\frac12)\}$; Lagrangeův koeficient λ nebylo třeba počítat.[9]) Protože $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ a $f(\frac12,-\frac12)=f(-\frac12,\frac12)=\frac12$, nabývá $f\,|\,V$ v prvních dvou bodech svého maxima, v druhých dvou svého minima.

Geometricky to znamená, že elipsa $F(x,y)=0$ (o středu v počátku) má poloosy délek $\sqrt2$ a $1/\sqrt2$, přičemž její hlavní osa (procházející body $(1,1)$ a $(-1,-1)$) svírá s osou x úhel $\frac14\pi$.

Příklad 17.10. Najděme extrémy funkce $f(x,y,z):=xyz$ na nulové hladině W vektorové funkce $F=(F_1,F_2)$, kde

$$F_1(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-4,\quad F_2(x,y,z):=(x-1)^2+y^2-1. \tag{56}$$

Nulová hladina W funkce F je průnik sféry o středu $(0,0,0)$ a poloměru 2 s válcovou plochou, jejíž osa je rovnoběžná s osou z a jejíž průnik s rovinou xy je kružnice o středu $(1,0)$ a poloměru 1. Jak již víme z Př. 16.8, je tato hladina známa pod názvem *Vivianiho křivka*; je kompaktní, protože je průnikem kompaktní množiny $(F_1)_{-1}(0)$ (sféry) s uzavřenou množinou $(F_2)_{-1}(0)$ (válcem).

Zkontrolujme, zdali platí předpoklady věty 17.3: Obě funkce f a F jsou třídy C_∞, v celém $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=2z, \tag{57$_1$}$$

[9]) Pro čtenáře, kteří jsou občas – třeba ze zvědavosti – ochotni vyslechnout nebo udělat i něco zbytečného: V prvním případě je $\lambda=-1/2$, ve druhém $\lambda=-1/8$.

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x\log\varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

3a

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \qquad && y &= \lambda_1 2x + \lambda_2, \\ (2) \qquad && x + z &= \lambda_1 2y + \lambda_2, \\ (3) \qquad && y &= \lambda_1 2z + \lambda_2, \\ (4) \qquad && x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ (5) \qquad && x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x\, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt = \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+t^2) - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty).$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x) - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

(3b)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$\begin{gathered} e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2 \\ + e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ - e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \\ -2\varphi''(x) = 0. \end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

26

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f, g_1 i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$
$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$
$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{5}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x-y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x-y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

(3b) Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \qquad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \qquad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Příklad G5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Provedeme rozklad integrandu na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}\,dx = \int \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x+1} + \frac{4x+7}{x^2+2x+4} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3} \int \frac{3}{x^2+2x+4}\,dx \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{3})^2+1}\,dx \\
&\stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \log|x+1| + \frac{2}{3} \log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right), \\
&x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, +\infty).
\end{aligned}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x \cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) = 0,$$

$$\frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x+(\varphi(x))^2)) \cdot (1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2$$
$$+(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x))$$
$$-\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x)+x^2)) \cdot (\varphi'(x)+2x)^2$$
$$+(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x)+2) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

3c

Příklad H4 : Položme

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2z & \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 2x & \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 1 \\
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 2y & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = -2y \\
\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 2x + 1 & \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x,y) = 2z & \dfrac{\partial g_2}{\partial z}(x,y) = -2z
\end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x,y,z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M.

Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$

$$x = y^2 + z^2 \tag{2}$$

$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{3}$$

(3c)

$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \tag{4}$$

$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{6}$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right], \qquad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

Příklad H5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}, \qquad dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{2t-1} + 1}{\frac{1-t^2}{2t-1} + t} \cdot \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt = \int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt$$

Platí

$$\frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{4t + 1}{(2t - 1)^2}$$

Rozložíme-li druhý výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt = \int \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{3}{(2t - 1)^2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2t - 1}\, dt$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{3}{8t - 4} - \frac{1}{2}\log|2t - 1|, \quad t \in (-\infty, 1/2) \text{ nebo } t \in (1/2, +\infty).$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$

$$+ \frac{3}{8(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) - 4} - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

4a

Příklad A4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y]$; $y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} &(1) & x^4 + y^4 &= 16,\\ &(2) & 4x^3y &= \lambda 4x^3,\\ &(3) & x^4 &= \lambda 4y^3. \end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

4b

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \tag{1}$$
$$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4}, \tag{2}$$
$$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}. \tag{3}$$

4b

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1\rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\overset{c}{=} \log|x+1|,\\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1}\\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$
\begin{aligned}
\log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) &= 0, \\
\frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))) + \varphi'(x) &= 0, \\
\frac{-1}{(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)))^2} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 & \\
+ \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) & \\
- \cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))) + \varphi''(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -2$.

Příklad C4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1) = f(x,y,-1) < f(x,y,z) < f(x,y,0), \qquad [x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ z \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M \cap \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$ a minima na množině $M \cap \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$. Položme $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Platí $g, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Pro každé $[x,y] \in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$x^2 + y^2 = 1,$$

(2) $$2x + y = \lambda 2x,$$

(3) $$x + 2y = \lambda 2y.$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3 - 2\lambda)(x + y) = 0.$$

To znamená, že buď $x = -y$ nebo $\lambda = 3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x = y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$.

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1],\ [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

4c

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], \ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

Příklad C5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+4}.$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30\int \frac{1}{(x+1/2)^2+15/4}\,dx \\ &= \log(x^2+x+4) + 8\int \frac{1}{\left((2x+1)/\sqrt{15}\right)^2+1}\,dx \\ &\overset{c}{=} \log(x^2+x+4) + 4\sqrt{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx \overset{c}{=} & -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{5}\log|x-2| \\ & + \frac{1}{5}\log(x^2+x+4) + \frac{4\sqrt{15}}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\end{aligned}$$

pro $x \in (-\infty, 2)$ nebo $x \in (2, +\infty)$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \min\{x^2 + y^2, 2 - x^2 - y^2\}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

3d

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = xy + yz \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1 : Platí:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$y = \lambda_1 2x + \lambda_2,$$

(2) $$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2,$$

(3) $$y = \lambda_1 2z + \lambda_2,$$

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

(5) $$x + y + z = 1.$$

3cl

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

X

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0,1,0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x\, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt = \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+t^2) - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty).$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x) - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}.$$

Příklad F4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x,y] = [0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$(1) \qquad 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x,$$
$$(2) \qquad 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y,$$
$$(3) \qquad x^2 + 4y^2 = 1.$$

Z (1) vyplývá, že $x = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x = 0$, pak podle (3) je $y = \pm 1/2$. Pokud $y = 0$, pak podle (3) je $x = \pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

5. kvádr A-H, $A = [0,0,0]$

$G \in M$:

$M = \{[x,y,z] : 4x+2y+z=2, \ x,y,z \geq 0\}$

Cíl: max objem

$G = [x_0, y_0, z_0]$

hledáme max $f(x,y,z) = xyz$ (mělo by být $|xyz|$, ale naše $x,y,z \geq 0$)

$$g(x,y,z) = 4x+2y+z-2$$

(1) $\nabla g = (4,2,1) \neq 0$ nikdy

(2) $f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 0$ $\quad xyz + \lambda(4x+2y+z-2) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $yz + 4\lambda = 0$ $\qquad yz - 4xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $xz + 2\lambda = 0$ $\qquad xz - 2xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}$: $xy + \lambda = 0$ $\rightarrow$ $\lambda = -xy$ $\rightarrow$

navíc $4x+2y+z=0$ $\qquad 4x+2y+z=0$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} -yz+4xy=0 \\ 2xz-4xy=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2xz - yz = 0 \rightarrow z(2x-y) = 0$$

$4x+2y+z=0 \qquad 4x+2y+z=0 \qquad 4x+2y+z=0$

(a) $z=0$ $\rightarrow$ tam max stejně nebude (místo kvádru by byl obdélník)

$\rightarrow$ (b) $\boxed{y=2x}$, $4x+2y+z=0$

5

$\rightarrow \quad 4x + 2\cdot 2x + z = 2$

$\rightarrow \quad \boxed{2 - 8x = z}$ (a máme $y = 2x$)

dosadíme do $\boxed{xz - 2xy = 0}$

$\rightarrow \quad x(2-8x) - 2x\cdot 2x = 0$

$2x - 8x^2 - 4x^2 = 0$

$2x(1-6x) = 0$

$x = 0$ (nebude max)

$\boxed{x = \frac{1}{6}}$ pak $\boxed{y = \frac{1}{3}}$ $z = 2 - \frac{8}{6}$

$\boxed{z = \frac{2}{3}}$

(jen pro formu $\lambda = -xy$ $\lambda = -\frac{1}{18}$).

Max. je v bodě $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

a hodnota je $\frac{2}{2\cdot 3\cdot 9} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$

Bonusové příklady

6. Farmář a farmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?

   (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$

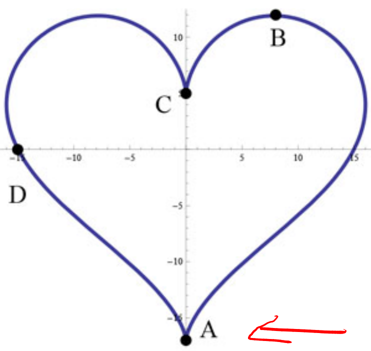
   (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$

   (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$

   (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$

Figure 1: https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

7. Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml