1a

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2}.$$

Řešení. Nejprve vyšetříme bodovou konvergenci, tj. konvergenci posloupnosti reálných čísel $f_n(x)$ pro všechny hodnoty reálného parametru x. Pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ nenulové je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} x\frac{1}{\frac{1}{n^2x^2}+1} = x$. Zároveň platí zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, a tedy posloupnost funkcí f_n konverguje bodově k funkci f, kde $f(x) = x$ na $\mathbb{R}$.

Dále vyšetříme, zda je tato konvergence dokonce stejnoměrná. Chceme zjistit, čemu se rovná $\sup\{|f_n(x) - f(x)|: x \in \mathbb{R}\}$. Zkoumejme za tím účelem extrémy funkce $f_n - f$. Platí, že $(f_n - f)'(x) = (-\frac{x}{1+n^2x^2})' = -\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. Tato derivace je tedy nulová, právě když $x = \frac{1}{n}$ nebo $x = -\frac{1}{n}$ a pro x blížící se k plus nebo k minus nekonečnu má $f_n - f$ limitu nula. Z toho plyne, že $f_n - f$ nabývá v bodě $\frac{1}{n}$ své maximální hodnoty $\frac{1}{2n}$ a v bodě $-\frac{1}{n}$ své minimální hodnoty $-\frac{1}{2n}$. Je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|: x \in \mathbb{R}\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ a dostáváme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. ■

tedy i $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$

1b

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

na intervalu $[0, 1]$.

Řešení. Snadno zjistíme, že posloupnost $f_n(x)$ konverguje k nule pro každé x z intervalu $[0, 1]$, a posloupnost tedy konverguje k nulové funkci bodově na intervalu $[0, 1]$.

Pokud posloupnost f_n konverguje stejnoměrně, pak musí konvergovat i posloupnost čísel $\sup\{|f_n(x)|: x \in [0, 1]\}$ k nule. Funkce f_n jsou spojité na kompaktním intervalu $[0, 1]$, a tedy nabývají svého minima i maxima. V krajních bodech mají hodnotu nula a pro $x \in (0, 1)$ je derivace $f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1}$. Ta je nulová právě pro jediné $x \in (0, 1)$, a to pro $x = \frac{1}{n+1}$. Platí tedy, že $\sup\{|f_n(x)|: x \in [0, 1]\}$ je rovno $(\frac{n}{n+1})^{n+1}$. Posloupnost těchto suprem (maxim) má limitu $\frac{1}{e}$, tedy nenulovou a posloupnost f_n nekonverguje stejnoměrně k nulové funkci na intervalu $[0, 1]$. ■

Fix $[0,a)$, pak $\sup\{|f_n(x)|, x \in [0,a)\} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ $\Gamma_n \to \frac{1}{e}$ $\Rightarrow$ $f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} 0$ na $[0,1]$.

1c

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí

$$x^n - x^{n+1}.$$

Řešení. Označme $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pokud $x \le -1$ nebo $x > 1$, posloupnost reálných čísel $f_n(x)$ nekonverguje.

Pro $x \in (-1,1]$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x)x^n = 0$ a maximální množinou $M \subset \mathbb{R}$, pro kterou platí, že posloupnost funkcí f_n konverguje bodově na M, je interval $(-1,1]$ a funkce f_n na tomto intervalu konvergují bodově k nulové funkci.

Vyšetříme, zda je tato konvergence stejnoměrná. Protože $|f_n(-1)| = 2$ a f_n je spojitá na intervalu $[-1,1]$, je $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in (-1,1]\}$ alespoň 2 pro všechna n, a tedy funkce f_n nekonvergují stejnoměrně na M ani na žádné podmnožině M, která obsahuje posloupnost konvergující k -1, t.j. M má neprázdný průnik s každým okolím bodu -1. Uvažujme nyní libovolnou množinu $N \subset M$, jejíž uzávěr neobsahuje -1. Existuje tedy $\varepsilon \in (0,2)$ takové, že $N \subset (-1+\varepsilon, 1]$. Derivace $f'_n(x)$ je nulová, právě když $x = \frac{n}{n+1}$. Supremum množiny čísel $|f_n(x)|$, $x \in N$, je tedy menší nebo rovno největšímu z čísel $|f_n(-1+\varepsilon)|$, $|f_n(1)|$ a $|f_n(\frac{n}{n+1})|$. Posloupnosti čísel $|f_n(-1+\varepsilon)|$ i čísel $|f_n(1)|$ konvergují k nule, neboť posloupnost f_n konverguje bodově k nulové funkci na intervalu $(-1,1]$. Máme $f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\frac{n}{n+1}) = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0$. Proto konverguje k nule i posloupnost maxim z čísel $|f_n(-1+\varepsilon)|$, $|f_n(1)|$ a $|f_n(\frac{n}{n+1})|$, a tedy i posloupnost suprem funkcí f_n na N. Proto je konvergence posloupnosti f_n na N stejnoměrná.

Protože libovolný bod intervalu $(-1,1]$ je obsažen v intervalu $(-1+\varepsilon, 1]$ pro dostatečně malé kladné ε i se svým okolím, je konvergence posloupnosti funkcí f_n k nulové funkci na intervalu $(-1,1]$ lokálně stejnoměrná. ■

1d

P ř í k l a d   Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x) = e^{-|x-\frac{1}{n}|n^2}$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že posloupnost funkcí f_n konverguje bodově k nulové funkci na $\mathbb{R}$.

Tato konvergence není stejnoměrná, neboť $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in \mathbb{R}\} \geq |f_n(\frac{1}{n})| = 1$.

Z téhož důvodu tato konvergence není ani lokálně stejnoměrná, neboť pro každé okolí nuly U leží nekonečně z hodnot $\frac{1}{n}$ v U, a proto ani posloupnost suprem $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in U\}$ nekonverguje k nule. ■

Na následujícím příkladu si ukážeme, že není vždy účelné (a ani možné) vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí f_n k funkci f na množině M výpočtem hodnot $\sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in M\}$.

1e

P ř í k l a d   Nechť $f_n(x) = (\log x) \cdot \sin \frac{x}{n(1+x^2)}$ pro $x > 0$. Dokažte, že $f_n \rightrightarrows 0$ na intervalu $(0, \infty)$.

Řešení. Uvědomme si, že platí $\sin x \leq x$ pro všechna $x \geq 0$, protože $\sin 0 = 0$ a rozdíl $x - \sin x$ je neklesající funkce, neboť $(x - \sin x)' = 1 - \cos x \geq 0$.

Pro $x \in (0,1]$ užijeme toho, že

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x \log x|}{n} \leq \frac{a}{n},$$

kde $a = \max\{|x \log x| \colon x \in (0,1]\}$. Takto definované reálné číslo a skutečně existuje, protože funkce $|x \log x|$ je po dodefinování hodnotou nula v nule spojitá na uzavřeném intervalu $[0,1]$.

Pro $x \in [1,\infty)$ užijeme toho, že

$$|f_n(x)| \leq \frac{\log x}{nx} \leq \frac{b}{n},$$

kde $b = \max\{\frac{\log x}{x} \colon x \in [1,\infty)\}$. Tentokrát existuje maximum b proto, že funkce $\frac{\log x}{x}$ je na intervalu $[1,\infty)$ spojitá a má limitu nula v nekonečnu.

Celkem tedy máme $\sup\{|f_n(x)| \colon x \in (0,\infty)\} \leq \frac{\max\{a,b\}}{n}$, a protože číselná posloupnost $\frac{\max\{a,b\}}{n}$ má limitu nula, konverguje posloupnost funkcí f_n stejnoměrně k nule na intervalu $(0,\infty)$. ∎

§81. Záměna limit. Povšimněte si, že posloupnost funkcí v posledním příkladu konverguje bodově ke spojité funkci a při tom nikoliv lokálně stejnoměrně. To je způsobeno chováním funkcí f_n v okolí bodu nula. Zkuste si rozmyslet, zda existuje taková posloupnost f_n spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, která konverguje k nulové funkci bodově a nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu. My budeme v dalším užívat následující postačující podmínku pro spojitost limitní funkce. Předchozí příklad ukazuje, že nejde o podmínku nutnou.

Nechť posloupnost spojitých zobrazení $f_n \colon (M,\rho) \to (P,\sigma)$ konverguje k zobrazení $f \colon M \to P$ lokálně stejnoměrně na M. Pak zobrazení f je spojité na (M,ρ).

O něco silnějším výsledkem je věta (Moore-Osgoodova) o záměně limit:

Nechť $a \in M$ není izolovaný bod prostoru M a nechť posloupnost zobrazení $f_n \colon (M \setminus \{a\},\rho) \to (P,\sigma)$ konverguje stejnoměrně k zobrazení f z M do P na nějakém prstencovém okolí a. Předpokládejme, že (P,σ) je úplný metrický prostor, např. $\mathbb{R}^k$. Pak platí, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x),$$

pokud $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existuje pro každé n přirozené.

Poznámka. Aplikací předchozího tvrzení na metrický prostor $(\mathbb{R}^*,\rho^*)$, kde $\mathbb{R}^* = [-\infty,\infty]$ a ρ^* je redukovaná metrika, dostáváme též varianty, ve kterých $a = +\infty$ či $a = -\infty$.

Příklad Konverguje posloupnost funkcí $e^{-(nx)^2}$ stejnoměrně (lokálně stejnoměrně) na $\mathbb{R}$?

Řešení. Funkce $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$ jsou spojité na $\mathbb{R}$ a konvergují bodově k charakteristické funkci f jednoprvkové množiny $\{0\}$. Ta není spojitá, a podle předchozího tvrzení nemůže jít o konvergenci lokálně stejnoměrnou, a tedy ani stejnoměrnou na $\mathbb{R}$.

11

Nepatrně jiným argumentem je, že $0 = \lim_{x \to 0} f(x) \neq \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 0} f_n(x) = 1$ a tvrzení o záměně limit říká, že nemůže jít o lokálně stejnoměrnou konvergenci. ■

1g

P ř í k l a d Konverguje posloupnost funkcí $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$?

Řešení. Je $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0$. Kdyby posloupnost f_n konvergovala stejnoměrně k f, tak by podle poznámky platilo, že $1 = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0$, což není možné. Tedy daná posloupnost funkcí nekonverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

Metodami předchozího paragrafu ověřte, že posloupnost restrikcí f_n na interval $[-k, k]$ konverguje stejnoměrně pro každé $k > 0$ a posloupnost f_n tedy konverguje k f lokálně stejnoměrně. ■

12

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{nx}$.

Řešení. Všechny funkce f_n jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a konvergují bodově k funkci $f(x) = 0$ na této množině, neboť funkce $\operatorname{arctg} nx$ je omezená a funkce $\frac{1}{nx}$ konvergují k nulové funkci bodově.

Tato konvergence není stejnoměrná na žádné množině, která obsahuje posloupnost $x_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, konvergující k nule, neboť $\lim_{n \to \infty} \lim_{k \to \infty} f_n(x_k) = 1 \neq 0 = \lim_{k \to \infty} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Kdyby totiž konvergovala stejnoměrně na $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, pak by se podle výše uvedené věty o záměně limit aplikované na metrický prostor $M = \{0\} \cup \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ musely obě dvojnásobné limity rovnat. ■

§82. Omezenost limity. *Pokud posloupnost omezených funkcí $f_n : M \to \mathbb{R}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f : M \to \mathbb{R}$, pak je i f omezená funkce na M.*

P ř í k l a d Konverguje posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{n}}$ stejnoměrně na $(0, \infty)$?

Řešení. Funkce f_n jsou omezené na $(0, \infty)$. Konvergují bodově k funkci $\frac{1}{x}$. Protože ta není na intervalu $(0, \infty)$ omezená, nekonverguje posloupnost funkcí f_n stejnoměrně. ■

§83. Záměna limity a derivace. *Je-li I omezený otevřený interval v $\mathbb{R}$, konverguje-li posloupnost funkcí $F_n' : I \to \mathbb{R}$ (lokálně) stejnoměrně k $f : I \to \mathbb{R}$ na I a existuje-li vlastní $\lim_{n \to \infty} F_n(a)$ pro nějaké $a \in I$, pak posloupnost F_n konverguje (lokálně) stejnoměrně k nějaké funkci F na I. Navíc platí, že $F' = f$ na I.*

P ř í k l a d Nechť $F_n(x) = \int_0^x (1 - \frac{y^2}{n})^n \, dy$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $F(x) = \int_0^x e^{-y^2} \, dy$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. (Určitým integrálem

Vzhledem k tomu, že $\rho(f_{s^n}, 0) \to 0$, $f_{s^n} \to 0$ dle našeho předpokladu. Vezmeme-li však posloupnost intervalů $\{\overline{I_{s^n}}\}$, pak se jedná a monotónní posloupnost kompaktních množin v $[0,1]$. Jejich průnik tedy obsahuje nějaký bod (vizte Větu **??**). V tomto bodě jsou ale všechny funkce f_{s^n} rovny 1, což je spor s jejich bodovou konvergencí k 0. ♣

12.5. Početní příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí

12.5.1. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad g_n(x) = x^{2n} - x^{3n}, \quad x \in (0,1).$$

Řešení. Zjevně platí $f_n \to 0$ a $g_n \to 0$ na $(0,1)$. Jelikož

$$f_n'(x) = x^{n-1}\left(n - (n+1)x\right), \quad x \in (0,1),$$

nabývá f_n maxima v bodě $x = \frac{n}{n+1}$ o hodnotě

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Tedy

$$\max_{x\in(0,1)} |f_n(x)| = \max_{x\in(0,1)} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \to 0.$$

Proto $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0,1)$.

1i

Naproti tomu $\{g_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $(0,1)$. Spočítáme-li totiž

$$g_n'(x) = nx^{2n-1}\left(2 - 3x^n\right), \quad x \in (0,1),$$

dostaneme, že

$$\max_{x\in(0,1)} |g_n(x)| = \max_{x\in(0,1)} g_n(x) = g_n\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \not\to 0.$$

tedy $g_n \not\rightrightarrows 0$

Platí však, že $g_n \rightrightarrows 0$ na každé množině tvaru $(0,q)$, kde $q \in (0,1)$, a tedy $g_n \rightrightarrows 0$ lokálně stejnoměrně na $(0,1)$. Mějme totiž $q \in (0,1)$ libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} > q$ pro $n \geq n_0$. Pak

$$\max_{x\in(0,q)} g_n(x) = g_n(q), \quad n \geq n_0,$$

a tedy $\max_{x\in(0,q)} g_n(x) \to 0$. ♣

12.5.2. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

potřebujeme spočítat limitu v $\pi-$ a $\pi+$ funkce $\log(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} - \log(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1) - \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to \pi-} \log\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} - \log\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} \\
&\quad = \lim_{x \to \pi-} \log \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Limita zprava v bodě π vyjde analogicky $\frac{-\pi}{2\sqrt{2}}$. Dostáváme tedy:

$$
\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x + 2} \, dx = F(x) + C \text{ na } \mathbf{R},
$$

kde

$$
F(x) = \begin{cases} \log \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & x = (2k+1)\pi. \end{cases}
$$

Příklad 2. Nejprve vyšetříme bodovou konvergenci. Pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí

2a

$$
\lim_{n \to \infty} n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = \lim_{n \to \infty} x \cdot \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x.
$$

(Používáme fakt, že $\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = \operatorname{arctg}' 0 = 1$, Heineho větu a větu o aritmetice limit.) Pro $x = 0$ je

$$
\lim_{n \to \infty} n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 = x,
$$

je tedy

$$
f_n \to x \text{ na } \mathbf{R}.
$$

Dále zkoumejme, na kterých intervalech je tato konvergence stejnoměrná.
Protože pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$
\lim_{x \to +\infty} f_n(x) - x = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to -\infty} f_n(x) - x = +\infty,
$$

není konvergence stejnoměrná na žádném neomezeném intervalu (tj. na intervalu $(-\infty, c)$ ani na $(c, +\infty)$ pro $c \in \mathbf{R}$). Abychom prozkoumali povahu konvergence na omezených intervalech, vyšetřeme průběh funkce $f_n(x) - x$, konkrétně její monotonii. Její derivace je pro každé $x \in \mathbf{R}$ rovna

$$
(f_n(x) - x)' = f_n'(x) - 1 = n \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} - 1 = \frac{n^2}{n^2 + x^2} - 1 = \frac{-x^2}{n^2 + x^2},
$$

funkce $f_n(x) - x$ je tedy klesající na $\mathbf{R}$. Protože je zároveň lichá, je zřejmé pro každé $c > 0$

$$
\sup\{|f_n(x) - x| : x \in \langle -c, c \rangle\} = |f_n(c) - c|.
$$

Protože $\lim_{n \to \infty} |f_n(c) - c| = 0$ pro každé c, je konvergence stejnoměrná na intervalu $\langle -c, c \rangle$ pro každé $c > 0$, tedu i na všech omezených intervalech.
Závěr: Posloupnost f_n konverguje bodově k x na $\mathbf{R}$. Konvergence je stejnoměrná na omezených intervalech, není stejnoměrná na neomezených intervalech.

tedy $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$

2b

$f_n(x) = \left|\cos \frac{x}{n}\right|^n$ $\qquad D_{f_n} = \mathbb{R}$

- bodově, fix x $\qquad$ pro $x=0$ je $\lim = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\cos\frac{x}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln\left|\cos\frac{x}{n}\right|} = e^0 = 1$$

1^∞

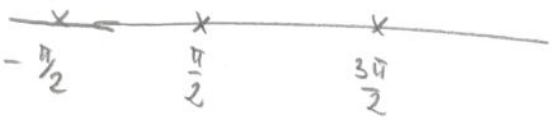
$$\lim_{n\to\infty} n \underbrace{\frac{\ln\left|\cos\frac{x}{n}\right|}{\left|\cos\frac{x}{n}\right|-1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\left(\left|\cos\frac{x}{n}\right|-1\right)}{-\frac{x^2}{n^2}}}_{1/2} \cdot -\frac{x^2}{n^2} = 0$$

- stejn., fix n:

$\sigma_n = \sup\left\{ \left|\left|\cos\frac{x}{n}\right|^n - 1\right|, x\in\mathbb{R}\right\}$

pro $\frac{x}{n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ máme $\sigma_n = 1$.

tedy $f_n \not\rightrightarrows$



- lok: zvolme interval $[-a,a]$. Pak $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ $[-a,a] \subsetneq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

pak $\sigma_n = \left(\cos\frac{a}{n}\right)^n - 1$

a $\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^n - 1 = 0$

$\to$ $f_n \rightrightarrows f$ na $[-a,a]$

$\to$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$

2c

$$f_n(x) = \frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}} \qquad D f_n = \mathbb{R}$$

- fix x, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}} = \lim \frac{n}{n} \frac{\frac{x}{n}+1}{\sqrt{(\frac{x}{n})^2+1}} = \underline{1} =: f \qquad D_f = \mathbb{R}$

  f_n i f spoj. na $\mathbb{R}$

- $\sigma_n = \sup \left\{ \left| \underbrace{\frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}} - 1}_{g_n(x)} \right|, \ x \in \mathbb{R} \right\}$

fix n,

$$g_n'(x) = \frac{\sqrt{x^2+n^2} - (x+n)\cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} \cdot \cancel{2}x}{x^2+n^2} = \frac{x^2+n^2 - x(x+n)}{(x^2+n^2)\sqrt{x^2+n^2}}$$

$$= \frac{n^2 - xn}{\underbrace{(x^2+n^2)\sqrt{x^2+n^2}}_{>0}} \qquad n(n-x) \qquad x_0 = n$$

g_n': $+$ na $(-\infty, n)$ ↗, $-$ na (n, ∞) ↘

pro $x_0 = n$: $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} = -1-1 = -2 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\frac{n+n}{\sqrt{n^2+n^2}} - 1 = \frac{2n}{\sqrt{2}\, n} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \quad (\doteq 0{,}41)$$

$\sup g_n(x) = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \not\to 0 \quad \to \quad f_n$ nekonv. stejnom. na $\mathbb{R}$

- zvolme interval $[a,b]$

  problematické body: $-\infty$ a "n"

  pro $n \geq n_0 \geq b$ máme kandidáty na max (spoj. na kpt.) v krajních bodech, tedy

$$\sigma_n = \max \left\{ \left| \frac{a+n}{\sqrt{a^n+n^2}} - 1 \right|, \left| \frac{b+n}{b^n+n^2} - 1 \right| \right\}$$

ale pro lim platí: $\xrightarrow{n\to\infty} 0$ a $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

tedy máme ~~lok~~ $\rightrightarrows$ na $\forall$ om. intervalu $\Longrightarrow$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$

2d

$$f_n = \exp\left(\frac{|x|-n}{|x|+n}\right) + \exp\left(-\frac{|x|-n}{|x|+n}\right) \qquad D f_n = \mathbb{R}$$

(f_n jsou sudé)

- bodově, fix x:

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{\frac{|x|}{n}-1}{\frac{|x|}{n}+1}\right) + \exp\left(-\frac{\frac{|x|}{n}-1}{\frac{|x|}{n}+1}\right) = e^{-1}+e^{1} = e+\frac{1}{e}$$

- stejnoměrně, fix n:

$$T_n = \sup \Big| \overbrace{\exp(\quad) + \exp(-(\quad))}^{g_n(x)} - e - \frac{1}{e} \Big|$$

f_n sudé, BÚNO $x \geq 0$, pro $x=0$ $f_n(0) = e^{-1}+e^{1}$

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = 0$$

$$g_n'(x) = e^{(\quad)} \cdot \frac{\overbrace{(x+n)-(x-n)}^{2n}}{(x+n)^2} + e^{(-\quad)} \cdot -\frac{(x+n)-(x-n)}{(x+n)^2}$$

$$= \frac{2n}{(x+n)^2}\left(e^{(\quad)} - e^{-(\quad)}\right) \geq 0$$

$$\frac{x-n}{x+n} = -\frac{x-n}{x+n} \qquad x-n = -x+n \qquad 2x = +2n \qquad x_0 = n$$

Podezřelé body: $x=0$ $\quad x\to\infty$

$x = \pm n$

0 $\quad x=n \quad$ 0

pro $x_0 = \pm n$ máme

$$\left|e^{0}+e^{-0}-e-\frac{1}{e}\right| = \left|2-e-\frac{1}{e}\right| \not\to 0$$

tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$

- lokálně: na $[-d,d]$ je max v $x_0 = d$ pro $d<n$ (stačí n znovu)

$$\to \lim_{n\to\infty} \underbrace{e^{\frac{d-n}{d+n}} + e^{-\frac{d-n}{d+n}} - e - \frac{1}{e}}_{} = e^{-1}+e^{-(-1)}-e-\frac{1}{e} = 0$$

$$\to f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$$