



7. cvičení – Mocninné řady – poloměr konvergence

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete poloměr konvergence R následujících mocninných řad a také konvergenci na hranici.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$

kde $(0 < \alpha < 1)$

Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0,$$

a tedy $R = +\infty$.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$

kde $p \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro každé $p \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \right| = 1,$$

tudíž poloměr konvergence je vždy 1.

Chování na hranici:

Pokud $p > 1$, pak řada konverguje absolutně na hranici.

Pokud $1 \geq p > 0$, potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p},$$

konverguje neabsolutně dle Leibnize. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

diverguje.

Pro $p \leq 0$ řada na hranici diverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$

kde $(a > 1)$

Řešení:

Platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{(n+1)^2 - n^2}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

Řešení:

Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|3^n + (-2)^n|}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{|1 + (-2/3)^n|}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

tudíž poloměr konvergence je $\frac{1}{3}$. (V odhadech jsme použili $\sqrt[n]{1} \leq |\sqrt[n]{1 + (2/3)^n}| \leq \sqrt[n]{2}$ a faktu, že lim sup se bude týkat sudých n .)

Chování na hranici: Je třeba vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

V prvním případě máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n},$$

což porovnáme s řadou $b_n = 1/n$, což diverguje.

V druhém případě získáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2^n}{n3^n}.$$

První část konverguje z Leibnize, druhá z d'Alamberta, tedy konverguje. Absolutní konvergenci již vyloučil první případ.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

Řešení:

Jedná se o mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou povětšinou nulové, s výjimkou koeficientů u x^{n^2} . Je třeba myslet na to, že koeficient $\frac{1}{2^n}$ je koeficient nikoliv u n -tého, ale n^2 -tého členu této řady. Abychom mohli použít vztahy pro výpočet poloměru konvergence, potřebujeme najít vztah pro n -tý koeficient a_n .

Jestliže ale platí

$$a_{n^2} = \frac{1}{2^n} \quad \text{a koeficienty jsou jinde nulové,}$$

potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} && \text{pokud } n = k^2 \text{ pro nějaké } k \text{ přirozené} \\ a_n &= 0 && \text{jinak} \end{aligned}$$

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu spočteme

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\sqrt{n} \cdot \frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Na hranici řada zjevně konverguje absolutně.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$$

Řešení: Platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

Pro konvergenci na hranici využijeme odhadů dokazatelných indukci

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Z prvního odhadu je zřejmé, že pro $x = 1$ řada diverguje srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{2n+1}$. Z druhého odhadu vyplývá, že pro $x = -1$ řada konverguje neabsolutně podle Leibnize. (Nutno dokázat monotonii posloupnosti $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$).

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$$

Řešení: Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 4.$$

Tudíž $R = \frac{1}{4}$.

Konvergence na hranici: Vyšetřujeme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n}.$$

Uvažujme první řadu.

Podíváme-li se pouze na sudé členy, dostaneme

$$a_{2n} = \frac{4^{2n} - 1}{2n \cdot 4^{2n}} = \frac{1}{2n}.$$

Pro liché členy dostaneme

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} - 1}{2n + 1 \cdot 4^{2n+1}} = \frac{1}{2n + 1} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Naši řadu lze tedy odhadnout zdola divergentní řadou $b_n = 1/(2n)$, tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

diverguje.

U druhé řady dostaneme opět sudé členy

$$a_{2n} = \frac{4^{2n} - 1}{2n \cdot 4^{2n}} = \frac{1}{2n}.$$

Pro liché členy dostaneme

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} - 1}{2n + 1 \cdot 4^{2n+1}} = \frac{-1}{2n + 1} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Z předchozího máme, že absolutně řada nekonverguje.

Pro neabsolutní konvergenci uvažujme posloupnost částečných součtů s_n . Protože pro liché členy je $|a_{2n+1}| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$, máme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{6} - \frac{1}{128} + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots \right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots - \left(\frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Pro limitu částečných součtů pak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty - \frac{2}{3} = \infty,$$

tedy řada diverguje.

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$

kde $a > 0$, $b > 0$.

Řešení:

BÚNO předpokládejme, že $a > b$. Pak Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \sqrt[n]{\frac{1}{1 + (b/a)^n}} = \frac{1}{a},$$

a tudíž

$$R = a.$$

(Použili jsme odhady $1 \leq 1 + (b/a)^n \leq 2$.)

Na hranici řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + b^n} \rightarrow 1 \neq 0.$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Řešení:

Je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Tudíž poloměr konvergence je 4.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n 4^n.$$

Pro $x = -4$ máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

použijeme NP a zjišťujeme, zda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

jde k 0. Porovnáme a_n a a_{n+1} :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!n!4^n(2n+2)!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!4 \cdot 4^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$$

Tedy posloupnost a_n je rostoucí, první člen je roven 1, tedy zjevně nejde k 0, tedy řada diverguje v bodě -4. Tedy v bodě 4 také.

Závěr: řada konverguje na $(-4, 4)$.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

a tedy $R = \frac{1}{e}$.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} (-1)^n.$$

Platí ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nespĺňuje nutnou podmínku konvergence $a_n \rightarrow 0$. Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \right] = e^{-\frac{1}{2}}$$

Protože pro $y = \frac{1}{x}$ máme z Taylora:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2} \ln(1+y) - \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2} \left(y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \right) - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}.$$

Závěr: řada konverguje na $(-1/e, 1/e)$.

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a\sqrt{n}},$$

kde $a > 0$.

Řešení:

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a\sqrt{n}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a^{-\sqrt{n} \cdot 1/n} = a^0 = 1.$$

Tedy

$$R = 1.$$

Pokud $a > 1$, potom řada na hranici konverguje absolutně, což plyne ze srovnání

$$\frac{\frac{1}{a\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{a\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Limitu lze spočítat například použitím Heineho věty a dvojnásobným aplikováním l'Hopitalova pravidla.)

Pokud $0 < a \leq 1$, potom řada na hranici diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, $a_n \not\rightarrow 0$.

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \cdot x^n,$$

kde $a > 0, b > 0$.

Řešení: Máme

$$a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$$

Vyšetříme dva případy, nejprve $a \geq b$, pak

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{a^n}{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2a^n}{n}} = a$$

$$\rho = \frac{1}{a}$$

analogicky pro $a < b$:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2b^n}{n}} \stackrel{VOAL}{=} b$$

$$\rho = \frac{1}{b}$$

Krajní body vyšetříme pro oba případy zvlášť. Řadu rozvíjíme v 0, tedy krajní body jsou $\rho = \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ a $-\rho = -\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$.

Nechť $a \geq b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{b^n}{a^n n^2} \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Použijeme porovnání řad (mají kladné členy) a zjistíme, že řada diverguje. Druhý krajní bod:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{(-1)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n b^n}{a^n n^2} \right)$$

Toto můžeme roztrhnout na 2 konvergentní řady, první konverguje z Leibnize, druhá taktéž. Tedy řada v krajním bodě $-1/a$ konverguje, ale nikoli absolutně.

Nechť $a < b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{b^n n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Toto opět roztrhneme na 2 řady, první konverguje z d'Alembertova kritéria, o druhé to víme. Tedy roztržení bylo korektní (roztrhli jsme na 2 konvergentní řady), řada konverguje. Dosadíme-li následně jako krajní bod $-1/b$, můžeme rozvnout říci, že řada konverguje absolutně.

Bonus

2. Víme, že řada $\sum a_n(x+7)^n$ konverguje pro $x=0$ a diverguje pro $x=-17$. Co můžeme říct o poloměru konvergence?

Řešení: Jelikož je střed mocninné řady v $x_0 = -7$, pro poloměr konvergence platí $7 \leq \rho \leq 10$.

3. Víme, že řada $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x=-4$ a diverguje pro $x=7$. Určete, zda jsou následující výroky pravdivé, nepravdivé nebo pravdivost nelze určit:

LEŽ Řada konverguje pro $x=10$.

PRAVDA Řada konverguje pro $x=3$.

LEŽ Řada diverguje pro $x=1$.

NEVÍME Řada diverguje pro $x=6$.

Řešení: Střed je v $x_0 = 0$, poloměr konvergence $4 \leq R \leq 7$. Tedy řada určitě konverguje na $[-4, 4)$ a určitě diverguje na $[7, \infty)$ a $(-\infty, -7)$. Na ostatních intervalech nevíme.

4. Najděte mocninnou řadu, která:

- (a) diverguje pro $x=0$;

Řešení:

Např. $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n(x-42)^n$. Tato řada má poloměr konvergence $R = 1/5$ a střed v $x_0 = 42$. V 0 tedy určitě diverguje. (Lze zjistit i dosazením, $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n 42^n$ diverguje.)

- (b) konverguje pro $x=5$, ale nikde jinde;

Řešení:

Např. $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-5)^n$.

- (c) má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro -2 .

Řešení: Zkusme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n.$$

Poloměr konvergence je $R = 2$. Pro krajní bod $x = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

což konverguje. Pro $x = -2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},$$

což diverguje.

5. Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence roven R_1 a mocninná řada $\sum b_n x^n$ má poloměr konvergence roven R_2 . Co můžeme říct o poloměru konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$?

Řešení: Platí, že $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

- Uvažujme x takové, že $|x| < \min\{R_1, R_2\}$. Pak obě řady konvergují absolutně a z linearity řad máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n + |b_n| \cdot |x|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \cdot |x|^n < \infty.$$

- Jestliže $R_1 < R_2$, tak dokonce $R = R_1$.

Uvažujme x takové, že $R_1 < |x| < R_2$. Pak z linearity konvergence řad máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

což je konvergentní plus divergentní řada, tedy dohromady divergentní.

Protože i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ je mocninná řada, pro $x: |x| \geq R_2$ plyne divergence z předchozího.

- Jestliže $R_1 = R_2$, může být i $R > R_1$.

Např.

(a) $a_n = 1, b_n = -1, R = \infty$

(b) $a_n = 1, b_n = 1, R = 1 = R_1$

(c) $a_n = 1 + 2^{-n}, b_n = -1, R = 2, 1 = R_1$