



## 13. cvičení – Metrické prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### 1 Separabilní prostory

**Definice 1.** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor. Řekneme, že  $A \subset X$  je *hustá*, pokud  $\overline{A} = X$ .

Metrický prostor  $(X, \rho)$  se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

- Úloha 2.**
1. Ukažte, že  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  jsou separabilní.
  2. ♡ Ukažte, že  $(C([0, 1]), \rho_{\text{sup}})$  je separabilní.
  3. ❀ Za jakých podmínek je separabilní diskretní metrický prostor?
  4. ❄ Ukažte, že Lebesgueův prostor  $L^1([0, 1])$  je separabilní.

**Věta 3.** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina  $A \subset X$  a  $\varepsilon > 0$  takové, že pro každé  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ , platí  $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ , pak  $X$  není separabilní.

**Poznámka 4.** Necht'  $p \in [1, \infty)$  a  $l_p$  je množina všech reálných posloupností  $\{x_n\}$ , pro něž řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$  konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

**Poznámka 5.** Označme  $l_{\infty}$  prostor všech omezených reálných posloupností  $\{x_n\}$  a  $c_0$  prostor všech (omezených) reálných posloupností  $\{x_n\}$  s  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Oba jsou s metrikou

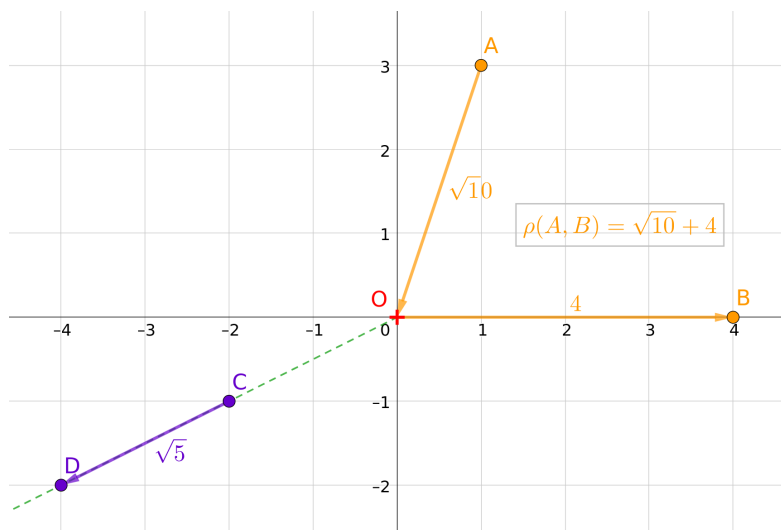
$$\rho_{\infty}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

**Úloha 6** (♡). Ukažte, že

1.  $l_{\infty}$  není separabilní.
2.  $c_0$  je separabilní.

**Úloha 7** (❀). Rozhodněte, zda pampeliškový prostor je separabilní. Položme  $X = \mathbb{R}^2$ , pro prvky  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  pak máme metriku

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A, B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$



**Úloha 8.** Označme  $L_0$  prostor všech lipschitzovských funkcí z  $[0, 1]$  do  $\mathbb{R}$  takových, že  $f(0) = 0$ . Zaveďme metriku

$$\rho(f, g) = \sup \left\{ \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|}; x \neq y \right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce  $f - g$ .

Ukažte, že prostor  $L_0$  není separabilní.

*Návod: Uvažujte funkce, které se rovnají 0 na  $[0, r]$  a pak se rovnají  $x - r$  pro různá  $r \in [0, 1]$ . Obrázek k návodu: <https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk>*

## 2 Totálně omezené prostory

**Definice 9.** Necht  $(X, \rho)$  je metrický prostor, necht  $\varepsilon > 0$ . Řekneme, že  $M \subset X$  je  $\varepsilon$ -sít v  $X$ , jestliže pro každý bod  $x \in X$  existuje bod  $y \in M$  takový, že  $\rho(x, y) < \varepsilon$ .

**Definice 10.** Metrický prostor  $(X, \rho)$  se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje konečná  $\varepsilon$ -sít.

**Poznámka 11.** • Někdy se říká i *prekompaktní*.

• Definici lze potkat i takto: Z každého  $\varepsilon$ -pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

**Úloha 12.** Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

**Úloha 13** (☆). Uvažujte prostor  $l^2$ . Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

**Úloha 14** (PRAVDA – NEPRAVDA).

ANO–NE Totálně omezená množina je omezená.

ANO–NE Omezená množina je totálně omezená.

**Úloha 15** (⊗). Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

**Úloha 16.** Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

### 3 Souvislé prostory

**Definice 17.** Řekneme, že metrický prostor  $(X, \rho)$  je *souvislý*, jestliže **není** sjednocením dvou neprázdných disjunktích otevřených množin.

**Věta 18** (Charakterizace souvislých prostorů). Nechť  $(X, \rho)$  je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor  $X$  není souvislý.
2. Existují dvě neprázdné disjunktí množiny  $F_1, F_2 \subset X$  uzavřené v  $(X, \rho)$  a takové, že  $X = F_1 \cup F_2$ .
3. Existuje obojetná neprázdna množina  $H$  splňující  $H \neq X$ .
4. Existuje spojitě surjektivní zobrazení  $f : (X, \rho) \rightarrow (\{0, 1\}, \rho_{diskr})$ .

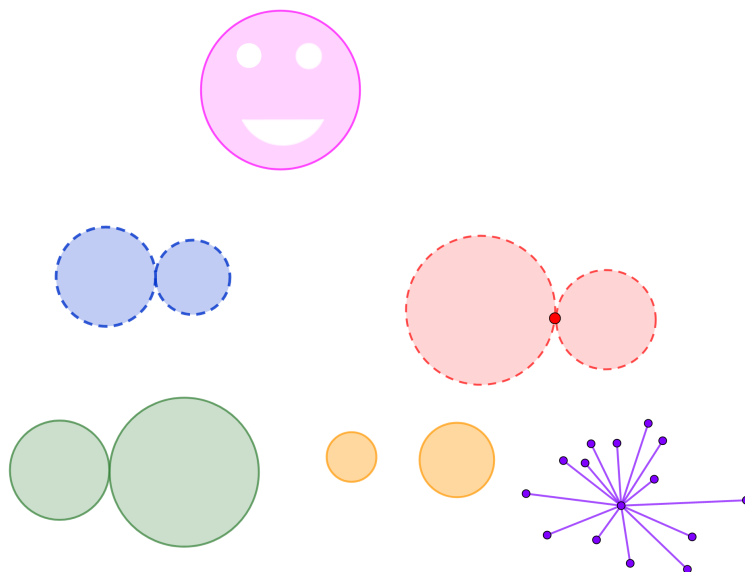
**Poznámka 19** (Jiná definice). Prostor  $(X, \rho)$  je *nesouvislý*, jestliže existují disjunktí neprázdné množiny  $A, B \subseteq X$  takové, že  $X = A \cup B$  a  $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ .

**Definice 20.** Nechť  $(X, \rho)$  je metrický prostor, nechť  $J \subset X$ . Řekneme, že  $J$  je *křivka* v prostoru  $(X, \rho)$ , jestliže existuje spojitě zobrazení  $f : [0, 1] \rightarrow (X, \rho)$  takové, že  $f([0, 1]) = J$ .

Řekneme, že množina  $A \subset X$  je *křivkově souvislá* v prostoru  $(X, \rho)$ , jestliže pro každé  $a, b \in A$  existuje spojitě zobrazení  $f : [0, 1] \rightarrow (A, \rho)$  takové, že  $f(0) = a$  a  $f(1) = b$ .

**Věta 21** (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti). Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

**Úloha 22.** Které množiny (jsme v  $\mathbb{R}^2$ ) jsou souvislé?



**Úloha 23 (PRAVDA – NEPRAVDA).**

ANO–NE Necht'  $A$  není souvislý. Pak  $\bar{A}$  není souvislý.

ANO–NE Necht'  $A$  je souvislý. Pak  $\bar{A}$  je souvislý.

ANO–NE Necht'  $A$  je souvislý. Pak  $\text{int } A$  je souvislý.

ANO–NE Necht'  $\bar{A}$  není souvislý. Pak  $A$  není souvislý.

**Úloha 24 (PRAVDA – NEPRAVDA).**

ANO–NE Necht'  $A$  není souvislý. Pak  $A^c$  není souvislý.

ANO–NE Necht'  $A$  je souvislý. Pak  $A^c$  není souvislý.

ANO–NE Necht'  $A$  je souvislý. Pak  $A^c$  je souvislý.

ANO–NE Necht'  $A$  a  $B$  jsou souvislé. Pak  $A \cup B$  je souvislá.

ANO–NE Necht'  $A$  a  $B$  jsou souvislé. Pak  $A \cap B$  je souvislá.

**Úloha 25.** Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor souvislý?

**Úloha 26** (♥). Ukažte, že prostor  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  je křivkově souvislý.



Figure 1: <https://www.meme-arsenal.com/en/create/template/805594>

(2.2) polynomy s $\mathbb{Q}$ koeficienty	(13) posloupnosti, které mají na $n$ -tém místě 1, jinde 0.
(2.3) jak vypadá konvergence v diskř. prostoru?	(15) Zadržte s $\varepsilon/2$ síť. Když jí nafouknete na $\varepsilon$ -síť, co se stane?
(2.4) co některé jednoduché funkce?	(26) Hledejte spojnice bodů $x$ a $y$ , které jdou přes osu úsečky $xy$ .
(6.1) posloupnosti typu $X_A, A \subset \mathbb{N}$	(7) Zvolte bod $x$ . Kde musí ležet jeho hustý kamarád? $A$
(6.2) posloupnosti s $\mathbb{Q}$ členy	kolik je poloprímek, které procházejí počátkem?