2. cvičení - rovnice

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmy

Rovnice

1. Napíšeme podmínky.
2. Zkusíme najít výraz, který by šel substituovat. (Např. $t = 4^x$, $t = \sin x$, $t = \log_{10} x \dots$)
3. Substituovanou rovnici vyřešíme (typicky půjde o řešení kvadratické rovnice).
4. Zkontrolujeme, která řešení připadají v úvahu. (Např. nelze vyřešit $\sin x = 2$.)
5. Odsubstituujeme.
6. Ještě jednou zkontrolujeme podmínky a zapíšeme řešení.

Hinty

Řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, lze nalézt pomocí vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pro vhodná $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$e^{\ln x} = x = \ln(e^x)$$

$$a^{\log_a x} = x = \log_a(a^x)$$

Příklady

1. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

   (a) $\log_{10} x = 3$
   (b) $\log_{10} x = \frac{-1}{4}$
   (c) $\log_2 x = 6$
   (d) $2^x = 4$
   (e) $2^x = \frac{1}{2}$
   (f) $2^x = 3$
   (g) $\cos x = \frac{1}{2}$
   (h) $\cos x = 3$
   (i) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

   (a) $\log_{10} x + \dfrac{8}{\log_{10} x} = 6$

   (b) $3^x - 1 = 1 - 3^{-x}$

   (c) $4\cos^2 x + 3 = 8\cos x$

   (d) $3 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x = 3$

   (e) $\log_{10} x + \dfrac{4}{\log_{10} x} = 4$

Indukce

3. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Matematickou indukcí dokažte, že

   (a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

   (c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   (d) $2n^2 > (n+1)^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?

   (e) $2^n > n^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?

   (f) $3 \mid (n^3 + 2n)$ (číslo 3 dělí výraz $n^3 + 2n$). Umíte dokázat i bez indukce?

   (g) Matematickou indukcí dokažte, že v konvexním n-úhelníku existuje právě $n(n-3)/2$ úhlopříček.