1a) $\log_{10} x = 3$

$\log_{10} x = \log_{10} 10^3$

$x = 10^3$

$\underline{x = 1000}$

b) $\log_{10} x = -1/4$

$x = 10^{-1/4}$

$x = \frac{1}{10^4}$

$\underline{x = \frac{1}{10000}}$

c) $\log_2 x = 6$

$x = 2^6$

$\underline{x = 64}$

d) $2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$\underline{x = 2}$

e) $2^x = 1/2$

$2^x = 2^{-1}$

$\underline{x = -1}$

f) $2^x = 3$

$e^{x \ln 2} = e^{\ln 3}$

$x \ln 2 = \ln 3$

$\underline{x = \frac{\ln 3}{\ln 2}}$

cos na ose x

g) $\cos x = 1/2$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

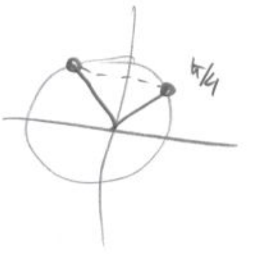
$k \in \mathbb{Z}$

$\underline{x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$

h) $\cos x = 3$

nelze

i) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\underline{x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi}$

2c) $4\cos^2 x + 3 = 8\cos x$

$t = \cos x$

$4t^2 + 3 - 8t = 0$

$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8}$

$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8}$

$t_1 = \frac{3}{2}$ $\quad t_2 = \frac{1}{2}$

nelze

$\cos x = 1/2$

$x = \pi/3 + 2k\pi$

$x = -\pi/3 + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

2a) $\log_{10} x + \frac{8}{\log_{10} x} = 6$

$t = \log_{10} x$

$t \neq 0$ $\quad t + \frac{8}{t} = 6 \quad /\cdot t$

$t^2 + 8 - 6t = 0$

$(t-2)(t-4) = 0$

$t_1 = 2 \quad t_2 = 4$

$\log_{10} x = 2$

$10^{\log_{10} x} = 10^2$

$\underline{\underline{x = 100}}$

$\log_{10} x = 4$

$x = 10^4$

$\underline{\underline{x = 10000}}$

2e) $\log_{10} x + \frac{4}{\log_{10} x} = 4$

$t = \log_{10} x$

$t \neq 0$ $\quad t + \frac{4}{t} = 4 \quad /\cdot t$

$t^2 - 4t + 4 = 0$

$(t-2)^2 = 0$

$t = 2$

$\log_{10} x = 2$

$10^{\log_{10} x} = 10^2$

$\underline{x = 100}$

2a)
$$3\cdot 2^{2x} + 8\cdot 2^x = 3$$

$$3\cdot(2^x)^2 + 8\cdot 2^x = 3$$

$$t = 2^x$$

$$3t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

$t_1 = 1/3$ $\quad$ $t_2 = -3$

$2^x = 1/3$ $\quad$ $2^x = -3$ nelze

$$e^{x\ln 2} = 1/3$$

$$x\ln 2 = \ln 1/3$$

$$x_1 = \frac{\ln 1/3}{\ln 2}$$

2b)
$$3^x - 1 = 1 - 3^{-x}$$

$$3^x - 1 = 1 - \frac{1}{3^x}$$

$$t = 3^x$$

$t \neq 0$ $\quad$ $t - 2 = -\frac{1}{t} \quad /\cdot t$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

$$3^x = 1$$

$$x = 0$$

MATEMATICKÁ INDUKCE

ALEŠ NEKVINDA

1. Princip matematické indukce

Nechť $V(n)$ je nějaká vlastnost přirozených čísel, např. " $n^2 + n$ je dělitelné dvěma " či " $n < 2^n$ " atd. Máme dokázat tvrzení typu "Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$". Jedna možnost jak to dokázat je tato: Dokážeme platnost $V(1)$ a potom dokážeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$. Pokud jsme toto udělali, víme ovšem , že platí $V(1)$. Protože platí $V(1) \Rightarrow V(2)$, platí $V(2)$. Protože platí $V(2) \Rightarrow V(3)$, platí $V(3)$. Protože platí $V(3) \Rightarrow V(4)$, platí $V(4)$ atd. Pak tedy vidíme, že platí $V(n)$ pro každé n. Symbolicky bychom mohli vyslovit větu:

Věta 1.1. *Buď $M \subset \mathbb{N}$ taková, že platí:*

(i) $1 \in M$;
(ii) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí implikace $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$.*

Pak $M = \mathbb{N}$.

2. Jednoduché příklady

Příklad 2.1. *Dokažte, že pro každé přirozené n platí*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Řešení. Označme $L(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $P(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$.
1. Pro $n = 1$ je to evidentně pravda a platí $L(1) = P(1)$.
2. Předpokládejme, že jsme to dokázali pro n. Dokažme to pro $n+1$.

$$L(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = L(n) + (n+1) =^{\text{indukční předpoklad}}$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \frac{1}{2}\big(n(n+1) + 2(n+1)\big) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = P(n+1).$$

Tím je příklad vyřešen.

$\square$

3a) **Příklad 2.2.** *Dokažte, že pro každé přirozené n platí*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Řešení. Označme $L(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, $P(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
1. Pro $n = 1$ je to evidentně pravda a platí $L(1) = P(1)$.

3a) 2. Předpokládejme, že jsme to dokázali pro n. Dokažme to pro $n+1$.

$L(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = L(n) + (n+1) =^{\text{indukční předpoklad}}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\big(n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2\big)$

$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6)$

$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big) = P(n+1).$

Tím je příklad vyřešen.

$\square$

3b) **Příklad 2.3.** *Dokažte, že pro každé přirozené* n *platí*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Řešení. Označme $L(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, $P(n) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.
1. Pro $n = 1$ je to evidentně pravda a platí $L(1) = P(1)$.
2. Předpokládejme, že jsme to dokázali pro n. Dokažme to pro $n+1$.

$L(n+1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = L(n) + (n+1)^3 =^{\text{indukční předpoklad}}$

$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 =^{\text{dle příkladu 2.1}}= \Big(\frac{1}{2}n(n+1)\Big)^2 + (n+1)^3$

$= \frac{1}{4}\big(n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3\big) = \frac{1}{4}(n+1)^2\big(n^2 + 4n + 4\big) = \Big(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\Big)^2$

$=^{\text{dle příkladu 2.1}}= \big(1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1)\big)^2 = P(n+1).$

Tím je příklad vyřešen.

$\square$

Příklad 2.4. *Dokažte, že pro každé přirozené* n *není číslo* $2^{3n} + 3^{4n}$ *dělitelné* 73.

Řešení. 1. Pro $n = 1$ je to evidentně pravda neboť $2^3 + 3^4 = 89$ skutečně není dělitelné 73.
2. Předpokládejme, že jsme to dokázali pro n. Jak je to pro $n+1$? Zřejmě

$$2^{3(n+1)} + 3^{4(n+1)} = 8\ 2^{3n} + 81\ 3^{4n} = 8\ (2^{3n} + 3^{4n}) + 73\ 3^{4n}.$$

Protože $8\ (2^{3n} + 3^{4n})$ není dělitelné 73 podle indukčního předpokladu a $73\ 3^{4n}$ je dělitelné 73, jejich součet $8\ (2^{3n} + 3^{4n}) + 73\ 3^{4n}$ není dělitelný 73. Tím je příklad vyřešen.

$\square$

Poznamenejme k předchozímu příkladu, že pokud bychom se spletli a dokázali, že pro $n = 1$ je dané číslo dělitelné 73, pak jsme dokázali přesný opak. Je tedy vidět, že 1. indukční krok nelze vynechat.

Příklad 2.5. *Je dáno* n *přímek v rovině. Tím se vytvoří několik oblast 'i. Dokažte, že kaďou oblast lze obarvit buď červeně nebo modře tak, že žádné dvě oblasti se společnou hranou nejsou obarveny stejnou barvou.*

Řešení. 1. Pro $n = 1$ je to evidentně pravda neboť 1 přímka rozdělí oblast na dvě poloroviny a každou z nich obarvím jednou ze dvou barev.
2. Nechť to umíme pro n přímek a v rovině jich mám zadáno $n+1$. Pak si jednu odmyslíme, nazvěme ji p, a dle indukčního předpokladu obarvím ty oblasti, které

(3c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

krok 1 pro $n=1$ máme

$$1(1+1) \overset{?}{=} \frac{1}{3} 1(1+1)(1+2) \quad \checkmark$$

krok 2 předpoklad : fix n :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

krok 3 chceme pro $n+1$, tedy

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

ale

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \overset{\text{ind. předp.}}{=} \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)\left[n+3\right] \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

Sumu v závorkách na pravé straně ale umíme sečíst podle indukčního předpokladu. Provedením algebraických úprav pak dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(ai+b) &= \Big(\sum_{i=1}^{n}(ai+b)\Big) + \big(a(n+1)+b\big)\\ &= \frac{1}{2}\big((n+1)a+2b\big)n + \big(a(n+1)+b\big)\\ &= \frac{1}{2}\big((n+2)a+2b\big)(n+1).\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ♣

1.8.6. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n \geq n$.

Řešení. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna, neboť $2^1 = 2 \geq 1$. Předpokládejme, že nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$, tj. platí $2^n \geq n$. Potom také platí

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

Tím je nerovnost ověřena pro $n+1$ a tvrzení je podle principu matematické indukce dokázáno. ♣

3d)

1.8.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Řešení. Tvrzení platí pro $n = 3$, neboť

$$2 \cdot 3^2 = 18 \geq 16 = (3+1)^2.$$

Předpokládejme nyní platnost nerovnosti pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Předpokládáme tedy $2n^2 \geq (n+1)^2$. Potom

$$\begin{aligned}2(n+1)^2 &= 2n^2 + 4n + 2 \geq (n+1)^2 + 4n + 2\\ &= n^2 + 6n + 3 = (n^2 + 4n + 4) + (2n - 1)\\ &= (n+2)^2 + (2n-1) \geq (n+2)^2.\end{aligned}$$

Tím je dokončen indukční krok. Z principu matematické indukce nyní vyplývá požadované tvrzení. ♣

3e)

1.8.8. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$.

Řešení. Opět použijeme princip matematické indukce popsaný v paragrafu 1.2.7, přičemž v prvním kroku dokážeme výrok pro $n = 4$. Tvrzení pro $n = 4$ platí, neboť $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Nyní učiníme indukční předpoklad, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$ a budeme se snažit dokázat $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Z indukčního předpokladu a Příkladu 1.8.7 plyne

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Podle (modifikovaného) principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $n \geq 4$. ♣

$3 \mid (n^3+2n)$

3f)

- $n=1$ $\quad 1+2=3 \quad 3 \mid (1^3+2\cdot 1)$ ✓
- k: $\quad 3 \mid (k^3+2k)$

$k \rightsquigarrow k+1$

$$(k+1)^3+2(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+2k+2$$

$$= \underbrace{k^3+2k}_{3 \mid (k^3+2k)} + \underbrace{3k^2+3k+3}_{3 \mid 3(k^2+k+1)}$$

tedy $\quad 3 \mid \left((k+1)^3+2(k+1)\right)$ ✓

3g)

- 3 úhelník $\quad 3(n-3)/2$ úhlopříček OK

4-úhelník $\quad 4(4-3)/2 \to 2$ úhlopříčky $\quad \boxtimes$ OK

- k: $\quad \frac{k(k-3)}{2}$ úhlop.

$k \rightsquigarrow k+1$ $\quad$ přidáním 1 bodu přidám $k-2$ nových úhlopříček a 1 strana se stane úhlopříčkou.

Tedy

$$\frac{k(k-3)}{2} + k-2+1 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k-3+1)}{2}$$

$$\frac{k^2-3k+2k-2}{2} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

$$\frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \checkmark$$