

7. cvičení - posloupnosti

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>

kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete limity

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty & \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 & \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty & \text{(j)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\
 \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 & \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0 & \text{(k)} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty \\
 \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty & \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 & \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty & \text{(l)} \lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty
 \end{array}$$

2. Určete limity

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} (-1)^n \not\# & \text{(c)} (-1)^n \frac{1}{n} = 0 \\
 \text{(b)} (-1)^n n \not\# & \text{(d)} \cos(\pi n) \sqrt{n} = (-1)^n \sqrt{n} \not\#
 \end{array}$$

3. Spočítejte limity

$$\text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{n}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 20 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 20 \cdot 0 = 0$$

(b) Podle aritmetiky limit a věty o odmocnině:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1 + 1/n^3}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 1/n^3}} = \frac{\infty}{1 + 0} = \infty.$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} -n^8 + 2n^3 - 4 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8}\right) \stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8}\right) \\
 &\stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^5} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^8}\right) = \infty(-1 + 0 - 0) = -\infty.
 \end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$$

Řešení: Užijeme opakovaně větu o aritmetice limit

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5}\right)}{n^5 \left(1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5}\right)} = \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^4} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^5}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^5}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2
 \end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 5}{n^3 + 8}$$

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 5}{n^3 + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{5}{n} + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{8}{n^3} \right)} = \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0} = 0$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n^{1/3}}}{1 + \frac{1}{n}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/3}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

(g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) + \cos(n^2)}{n^2 - 3}$$

Řešení: Máme $|\sin n + \cos n^2| \leq 1 + 1 = 2$, tedy jde o omezenou posloupnost. Dále

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 3} = 0.$$

Tedy dle věty o součinu omezené a mizející je výsledná limita rovna 0.

4. Spočtete limitu

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$

Řešení: Z aritmetiky limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = \infty + \infty = \infty$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1+0} = 1$$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1-n}{n^2-3-(n+2)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3}-\sqrt{(n+2)^2}} \cdot \frac{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{(n+2)^2}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{-4n-7} \frac{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2+4n+4}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{-1}{-4n-7} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{1-3/n^2}+\sqrt{1+4/n+4/n^2}}{\sqrt{1-1/n}+\sqrt{1}} \\
 &\stackrel{VOAL}{=} \frac{-1}{-0} \frac{1}{\infty} \frac{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0+0}}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1}} = 0
 \end{aligned}$$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)} \\
 &\stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{\infty(\infty+\infty)} = 0
 \end{aligned}$$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+3n-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}}$

Řešení: Jmenovatele rozšíříme podle vzorce $A^6 - B^6$, čitatele podle $A^2 - B^2$.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+3n-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+3n-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{n^4+3n-1}+n^2}{\sqrt{n^4+3n-1}+n^2} \\
 &\quad \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^5} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4}\sqrt{n^2-1} + \dots + \sqrt{(n^2-1)^5}}{\sqrt[3]{(n^3+1)^5} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4}\sqrt{n^2-1} + \dots + \sqrt{(n^2-1)^5}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+3n-1-n^4}{(n^3+1)^2-(n^2-1)^3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^5} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4}\sqrt{n^2-1} + \dots + \sqrt{(n^2-1)^5}}{\sqrt{n^4+3n-1}+n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{3n^4+2n^3-3n^2+2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^5} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4}\sqrt{n^2-1} + \dots + \sqrt{(n^2-1)^5}}{\sqrt{n^4+3n-1}+n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n^5}{n^4 \cdot n^2} \cdot \frac{3 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^3})^5} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^3})^4}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \dots + \sqrt{(1 - \frac{1}{n^2})^5}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4}} + 1} \\
 &= \frac{3}{3} \cdot \frac{6}{2} = 3
 \end{aligned}$$

5. Spočítejte limity

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n(n + 1)}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n(n + 1) - n(n + 2)}{2(n + 2)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-n}{2(n + 2)} \right\} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6n^3} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 1/n)(2 + 1/n)}{6} \\ &= (1 + 0)(2 + 0) = 2. \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)}$$

Řešení: Použijeme trik:

$$\frac{1}{k(k + 1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}.$$

Nyní aplikováno na limitu získáme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Okásek sumy je maličký (jde k nule), a všechny členy kromě jedničky se pokrátí. Tedy výsledek je roven 1.

Bonus

6. Spočítejte limity

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 4)^{100} - (n + 3)^{100}}{(n + 2)^{100} - n^{100}}$$

Řešení: Roznásobíme závorky podle binomické věty a nebudeme se příliš rozepisovat s malými mocninami:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{100} + 100 \cdot 4n^{99} + \dots)(n^{100} + 100 \cdot 3n^{99} + \dots)}{(n^{100} + 100 \cdot 2n^{99} + \dots) - n^{100}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{99}(\dots)}{2n^{99}(\dots)} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n}, \quad \text{kde } |a|, |b| < 1$$

Řešení: Použijeme součet geometrické řady a větu o aritmetice limit...: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Limita vyjde: $\frac{1-b}{1-a}$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

Řešení: Rozšíříme vhodným zlomkem tak, abychom se zbavili odmocnin:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cdot \frac{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3}}{n^{2/3}} \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + 1}} = \\ &= \frac{0}{\sqrt[3]{1+0+0} + \sqrt[3]{1+0+1}} = 0 \end{aligned}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}$$

Řešení: Rozšíříme jmenovatel tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$ odstranili odmocninu ve jmenovateli. Rozšíříme čítelek tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$ odstranili odmocninu v čitateli.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}} &\cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \cdot \\ &\cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{6} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} = 1 \cdot \frac{1+1+1}{1+1+1} = 1. \end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Použijeme opět trik:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

Když si nyní limitu rozepíšeme, začnou se nám závorky navzájem krátit s jmenovateli a zbyde nám $1/2$ a malý zbytek. Tedy limita je rovna $1/2$.

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

Řešení: Řešíme na základě znalosti nerovnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

což jde k nule. Zespoda je limita také omezená, vše je kladné. Čili celkem je rovna 0.