

15. cvičení - Goniometrické funkce + VOLSF

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O limitě složené funkce). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$ a necht' funkce f a g splňují

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(S) f je spojitá v A ;

(P) $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

Fakt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

K odvození

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arccot} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$$

Hinty

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \cos 4x^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x)$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cotg} 3x$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$
- (p) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
- (q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$
- (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$
(Hint: použijte "substituci" $y = x - \pi$.)
- (u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$

Zkouškové příklady

2. Spočítejte limity zadaných funkcí

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{5/2} \arcsin(\sqrt{x^5 + 1} - \sqrt{x^5 - 1})$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x})}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}}$

Bonus

3. Existuje spojitá funkce taková, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ano?
4. Sestrojte funkci definovanou na celém \mathbb{R} , která ale má limitu pouze v 0 (v ostatních bodech limita neexistuje).
5. Nechť $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je bijekce. Rozhodněte, zda je pak f spojitá alespoň v jednom bodě.