

16. cvičení - Exponenciála a logaritmus + VOLSF

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Fakt

$\alpha > 0, \beta > 0, c > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{c^x} = 0.$$

K odvození

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

Hinty

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$

(d) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$

(e) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

(f) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2 + 4)} - \ln x^2}{\operatorname{arccotg} x}$

(h) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

(k) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1}$

(m) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, kde $a > 0$.

(n) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

(o) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$

(p) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

Zkouškové příklady

2. Spočtěte limity zadaných funkcí

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1 + x^2}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\log \left(1 + \frac{3}{x}\right)} (\log(1 + x^3))^2$$

Bonus

3. Rozhodněte, zda platí

(TRUE–FALSE) Necht' funkce $f(x)$ není shora omezená v žádném okolí $P(0, \delta)$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

(TRUE–FALSE) Necht' $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Pak existuje okolí $P(0, \delta)$ takové, že funkce f je zdola omezená na $P(0, \delta)$.

4. Necht' $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Ukažte, že

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

(Ia) Vytkněte nejrychlejší rostoucí člen z logaritmu	(Ia) Vytkněte nejrychlejší rostoucí člen
(Ib) Vytkněte vzorce pro logaritmus	(Ib) Vytkněte vzorce pro logaritmus
(If) Vytkněte dominantní člen z logaritmu	(If) Vytkněte dominantní člen z logaritmu
(Ie) Zbavme se odmocniny	(Ie) Zbavme se odmocniny
(Im) Vytkněte $a^x = e^{x \ln a}$	(Im) Vytkněte $a^x = e^{x \ln a}$
(In) Převěďte na základní limitu	(In) Převěďte na základní limitu
(Io) Vytkněte dominantní člen	(Io) Vytkněte dominantní člen
(Id) Vytkněte dominantní člen	(Id) Vytkněte dominantní člen