Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: jediná omezení na definiční obor klade jmenovatel zlomku, tedy definiční obor f, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$ (neboť je složením spojitých funkcí exp, arctg, a podílu dvou spojitých funkcí, přičemž jmenovatel $x^2 - 1$ je na $\mathcal{D}(f)$ nenulový), dále je f na $\mathcal{D}(f)$ sudá a kladná ($f > 0$ na $\mathcal{D}(f)$).
- Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+} f(x) &= \exp\frac{\pi}{2} \approx 4.81 && \Big(= \lim_{x\to -1-} f(x) \text{ ze sudosti}\Big),\\
\lim_{x\to 1-} f(x) &= \exp\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) \approx 0.208 && \Big(= \lim_{x\to -1+} f(x)\Big),\\
\lim_{x\to \pm\infty} f(x) &= 1, && \text{odkud rovněž plyne} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.
\end{aligned}$$

  Poslední dvě (dvoj)limity tedy zároveň říkají, že asymptotou funkce f jak v $+\infty$, tak v $-\infty$, je přímka $y = 1$.

- První derivace: pro $x \in \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ je

$$f'(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2} \cdot (-1)\,\frac{2x}{(x^2-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\,\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1},$$

  funkce f tedy roste na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$, a klesá na $(0, 1)$ a na $(1, +\infty)$. V bodě 0 je tedy lokální maximum hodnoty $f(0) = \exp(-\pi/4) \approx 0.456$, $f'(0) = 0$. V bodech ± 1 není f definovaná, nemá tam tedy ani jednostranné derivace z žádné ze stran. Pro náčrt grafu je však možná dobré si spočítat limitní polohy tečen, tj. limity derivací (pozor na znaménka derivace v symetrických bodech, derivace sudé funkce je funkce lichá):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} f'(x) &= -\lim_{x\to -1+} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{e^{\pi}}} \approx -0.416,\\
\lim_{x\to 1+} f'(x) &= -\lim_{x\to -1-} f'(x) = -2\sqrt{e^{\pi}} \approx -9.62.
\end{aligned}$$

- Obor hodnot: uvážením všech dosud získaných informací vidíme (náčrtek jistě také pomůže), že obor hodnot

$$\mathcal{H}(f) = \left(\exp\Big(-\frac{\pi}{2}\Big), \exp\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\right) \cup \left(1, \exp\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\right).$$

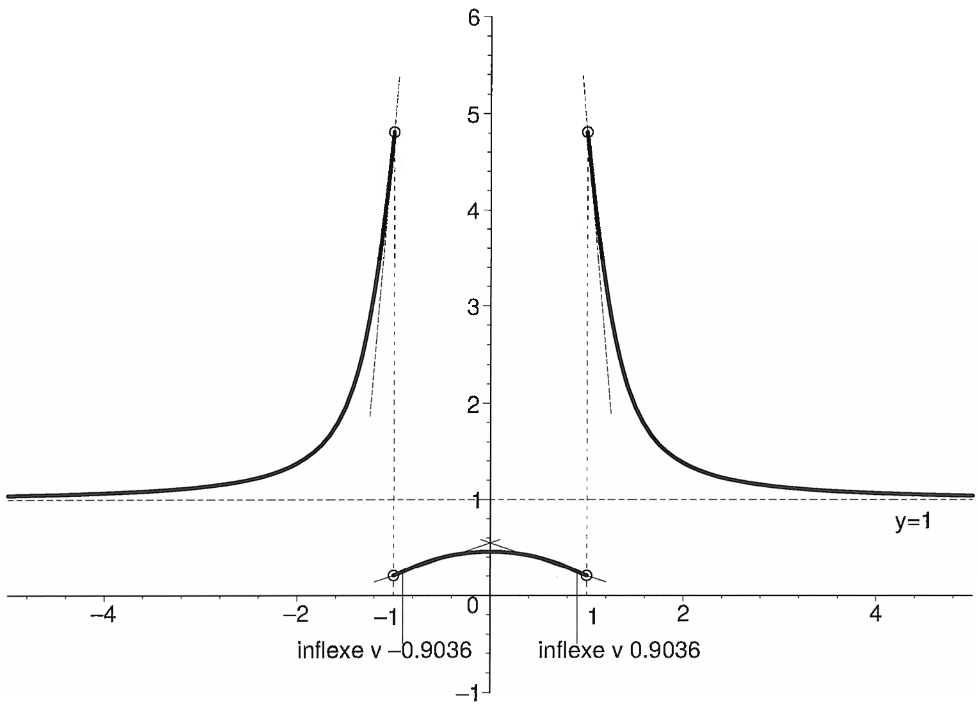
- Druhá derivace po úpravě vyjde:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \left[\left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}\right)'\right] =\\
&= e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \left[\frac{4x^2 - 2\big((x^2-1)^2+1\big) + 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{\big((x^2-1)^2+1\big)^2}\right] =\\
&= 2e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\,\frac{3x^4-2}{\big((x^2-1)^2+1\big)^2} \qquad x \neq -1, 1.
\end{aligned}$$

Pouze čitatel zlomku výše mění znaménko. Výraz v čitateli má dva reálné kořeny $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2/3} \approx \pm 0.9036 \in \mathcal{D}(f)$.

Funkce f je tedy konvexní na intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,-\sqrt[4]{2/3})$, $(\sqrt[4]{2/3},1)$ a $(1,+\infty)$, a konkávní na $(-\sqrt[4]{2/3}, \sqrt[4]{2/3})$, a v bodech $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2/3}$ má inflexní body.

- Graf funkce f, načrtnutý na základě všech výše uvedených informací, je tento:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost, sudost .... 1 bod
- limity v krajích definičního oboru, asymptoty .... 2 body
- výpočet první derivace .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy, limity derivací .... 2 body
- obor hodnot .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita, inflexe .... 2 body
- graf .... 2 body

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3},$$

kde „třetí odmocninou“, tj. funkcí $\sqrt[3]{z}$, rozumíme funkci inverzní k funkci $z^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: lichá odmocnina z reálného čísla je definovaná pro všechna reálná čísla, proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$.
- *Význačné hodnoty funkce (nebylo nutno zkoumat, pouze pomáhají):* $f(x) = 0 \iff x = 0$ *nebo* $x = 3$, $f(x) > 0$ *pro* $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $f(x) < 0$ *pro* $x \in (3, +\infty)$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = \mp\infty$.
- Odtud a ze spojitosti f na $\mathbb{R}$ plyne, že obor hodnot $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.
- Dále lze ihned spočíst asymptoty v $\pm\infty$:

$$a := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$

a

$$\begin{aligned} b &:= \lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - ax\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x\right) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x^2} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} + 1} = 1, \end{aligned}$$

existuje tedy asymptota, tatáž v obou nekonečnech, a sice $y = -x + 1$.

- První derivace (zde i dále užíváme pro větší přehlednost zápisu konvence $\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$, myslíme tím ovšem stále třetí odmocninu jako inverzní funkci ke třetí mocnině, tedy odmocninu definovanou pro všechna reálná čísla):

$$f'(x) = \left((3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{6x - 3x^2}{3(3x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 - x}{x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}}}, \qquad x \neq 0, 3,$$

funkce f tedy roste na $(0, 2)$ a klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(2, +\infty)$. V bodě 0 je lokální minimum hodnoty $f(0) = 0$, v bodě 2 je lokální maximum $f(2) = \sqrt[3]{32} \approx 1.587$, $f'(x) = 0 \iff x = 2$. Dále, protože f je spojitá (z obou stran) v bodě 0 i v bodě 3:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty, \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty, \quad \text{tj. } f'(0) \text{ neexistuje},$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3+} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 3-} f'(x) = f'_-(3), \quad \text{tj. existuje } f'(3) = -\infty.$$

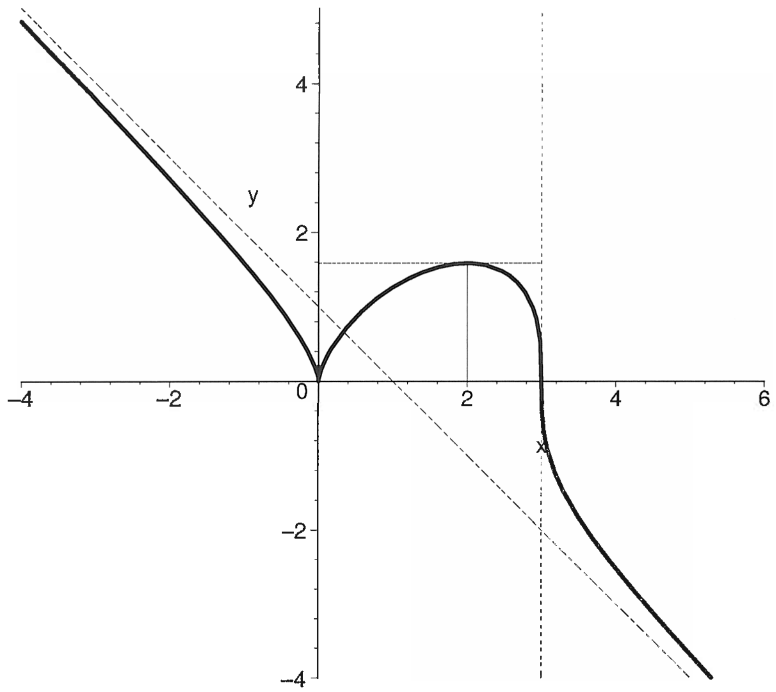
Derivaci v bodě 3 lze spočíst i z definice, $f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x^3}}{x - 3} = -\infty$ například pomocí l'Hospitalova pravidla, což vede opět na výpočet $\lim_{x\to 3} f'(x)$.

- Druhá derivace po úpravě vychází:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2 - x}{x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}}}\right)' = \frac{-x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}} - (2 - x)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{-\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}(3 - x)^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \frac{-x(3 - x) - (2 - x)\left(\frac{1}{3}(3 - x) - \frac{2}{3}x\right)}{x^{\frac{4}{3}}(3 - x)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}(3 - x)^{\frac{5}{3}}} \qquad x \neq 0, 3. \end{aligned}$$

Funkce je tedy konvexní na intervalu $(3, +\infty)$, a konkávní na $(-\infty, 0)$ a na $(0, 3)$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- limity v krajích definičního oboru, asymptoty .... 2 body
- obor hodnot .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 1 bod
- jednostranné derivace (limity derivací) a derivace v bodě 3 .... 2 body
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- graf .... 2 body

Nejčastější chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- nespecifikování bodů, pro které neplatí obecný vzorec pro f' resp. f''
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací
- tvrzení, že f klesá na $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- tvrzení, že f je konkávní na $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2\log x}{1+\log^2 x}\right),$$

kde $\log x$ ($= \ln x$) je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

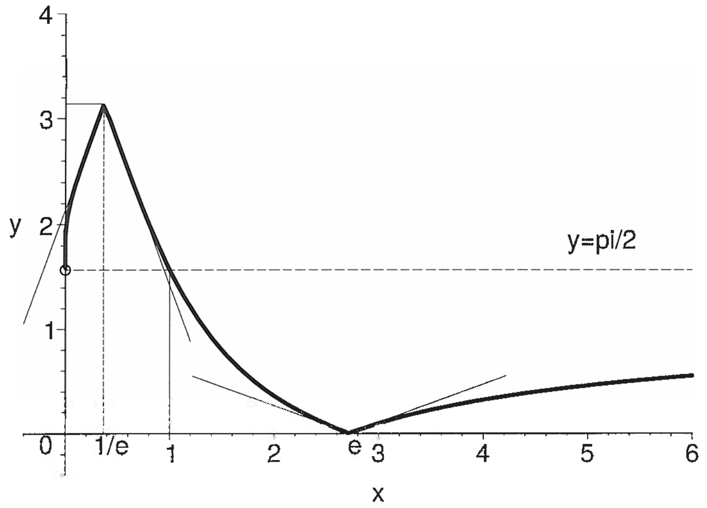
Řešení :

- Definiční obor: musí platit $x > 0$ a zároveň $-1 \le \frac{2\log x}{\log^2 x+1} \le 1$. Odtud tedy $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, z tvaru definičního oboru plyne, že nemá smysl uvažovat symetrie (sudost, lichost, periodicitu), $f \ge 0$ na $\mathcal{D}(f)$, a dále je (např.) $f(1) = \pi/2$.
- Obor hodnot: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, $f(x) = \pi \Leftrightarrow x = 1/e$, funkce f je (mimo jiné) spojitá na uzavřeném intervalu $\langle 1/e, e\rangle$, nabývá tedy i všech mezihodnot mezi 0 a π. Protože funkce arccos jiných hodnot nabýt nemůže, je obor hodnot $[0, \pi]$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru: protože $\frac{2\log x}{1+\log^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\log x}+\log x}$ konverguje k nule jak pro $x \to 0+$, tak pro $x \to +\infty$, a protože $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, a navíc funkce arccos je spojitá v nule, plyne z věty o limitě složené funkce
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{odkud rovněž plyne} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\,.$$
Poslední dvě limity tedy zároveň říkají, že přímka $y = \frac{\pi}{2}$ je asymptotou v $+\infty$.
- První derivace: pro $x \in \mathcal{D}(f') = (0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{e}, e\}$ je
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\log^2 x}{(\log^2 x+1)^2}}}\cdot\frac{\frac{2}{x}(\log^2 x+1) - 2\log x\cdot\frac{2}{x}\log x}{(\log^2 x+1)^2} = \\ &= -\frac{\sqrt{(\log^2 x+1)^2}}{\sqrt{(\log^2 x-1)^2}}\cdot\frac{2-2\log^2 x}{x(\log^2 x+1)^2} = \frac{2\,(\log^2 x-1)}{x\,(\log^2 x+1)|\log^2 x-1|} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x-1)}{x\,(\log^2 x+1)}\,. \end{aligned}$$
Dále,
$$f'_+(e) = \lim_{x\to e+} f'(x) = \frac{1}{e}, \qquad f'_-(e) = \lim_{x\to e-} f'(x) = -\frac{1}{e},$$
$$f'_+\Big(\frac{1}{e}\Big) = \lim_{x\to\frac{1}{e}+} f'(x) = -e, \qquad f'_-\Big(\frac{1}{e}\Big) = \lim_{x\to\frac{1}{e}-} f'(x) = e,$$
protože f je spojitá v bodě e i v bodě $1/e$ a protože příslušné limity derivací existují.
Funce f klesá na $(1/e, e)$, roste na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. V bodě $1/e$ je lokální maximum hodnoty π, v bodě e je lokální minimum hodnoty 0. S ohledem na obor hodnot jde v obou případech také o globální extrémy. Hodí se též spočítat si $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$, i když derivace $f'_+(0)$ není definována (f není definována v 0).
- Druhá derivace:[2]
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x-1)\left(\frac{1}{x\,(\log^2 x+1)}\right)' = -2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x-1)\frac{\log^2 x+1+2\log x}{x^2\,(\log^2 x+1)^2} = \\ &= \underbrace{-\frac{2\,(\log x+1)^2}{x^2(\log^2 x+1)^2}}_{<0}\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x-1)\,, \qquad x \ne \frac{1}{e}, e\,. \end{aligned}$$
f je tedy konvexní na $(1/e, e)$ a konkávní na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. Funkce nemá inflexní body.

---

[2]Nebojte se derivovat sgn, mimo body e a $1/e$ je to konstanta, tudíž ji lze vytknout z derivovaného výrazu.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- limity v krajích definičního oboru .... 1 body
- asymptota .... 1 bod
- obor hodnot .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 2 body
- jednostranné derivace (limity derivací) v e a $1/e$ .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- graf .... 2 body

Některé časté chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- neuvedení bodů e a $1/e$, pro které neplatí obecný vzorec pro f' resp. f''
- odmocňování podle schématu „$\sqrt{A^2} = A$“, přičemž správně je $\sqrt{A^2} = |A|$
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací
- tvrdit, že existuje jednostranná derivace v bodě, ve kterém není funkce definovaná

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \frac{|1+x|}{\sqrt[3]{x}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: jediná omezení na definiční obor klade jmenovatel zlomku, tedy definiční obor $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, protože je součtem, podílem a složením spojitých funkcí, přičemž jmenovatel zlomku je na definičním oboru nenulový. Funkce není sudá, lichá, periodická. Dále platí $f(x) = 0$ právě když $x = -1$; $f(x) > 0$ pro $x > 0$, a $f(x) < 0$ pro $x < 0$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty\,,$$

  například podle věty o limitě typu „$\frac{A}{0}$“, a

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty\,,$$

  například s využitím l'Hospitalova pravidla „$\frac{c}{\infty}$“ (váš výpočet by ovšem měl být o něco podrobnější).
- Asymptoty: není těžké spočíst, že

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+x}{x\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt[3]{x}} = 0 =: a\,,$$

  proto

$$b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - 0) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

  proto asymptota v nekonečnu (a podobně i asymptota v mínus nekonečnu) neexistuje.
- Pro výpočet první derivace je dobré si například uvědomit, že $|1+x| = (1+x)\operatorname{sgn}(1+x)$, tedy

$$f'(x) = \left(\operatorname{sgn}(1+x)\,\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \operatorname{sgn}(1+x)\left(\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)'\,, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\,,$$

  protože $(\operatorname{sgn}(1+x))' = 0$ na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Kdo se však bojí derivovat absolutní hodnotu, může samozřejmě uvažovat f separátně pro $x < -1$ a $x > -1$. Tak či tak, dostaneme:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(1+x)\left(\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \operatorname{sgn}(1+x)\,\frac{2x-1}{3x^{\frac{4}{3}}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} = \mathcal{D}(f)\setminus\{-1\}\,.$$

  Odtud snadno plyne, že funkce f roste na $(-\infty,-1)$ a $(\frac{1}{2},+\infty)$, a klesá na $(-1,0)$ a na $(0,\frac{1}{2})$. V bodě -1 je lokální maximum hodnoty $f(-1) = 0$, v bodě $\frac{1}{2}$ je lokální minimum hodnoty $f(1/2) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1.89$. Funkce nemá žádné globální extrémy.
- Jednostranné derivace v bodě -1 spočteme jako limitu derivací z příslušné strany, neboť f je spojitá v bodě -1:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} f'(x) = 1\,, \qquad f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} f'(x) = -1\,, \qquad \text{tj. } f'(-1) \text{ neexistuje.}$$

- Obor hodnot: funce f je spojitá na $(-\infty, 0)$, v obou krajních bodech tohoto intervalu má (z příslušné strany) limitu $-\infty$, a nabývá na tomto intervalu lokální (a vzhledem k tomuto intervalu i globální) maximum hodnoty 0. Podle věty o nabývání mezihodnot je tedy $f(-\infty, 0) = (-\infty, 0\rangle$. Podobnou úvahou dostaneme $f(0,\infty) = \langle \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \infty)$, celkově tedy:

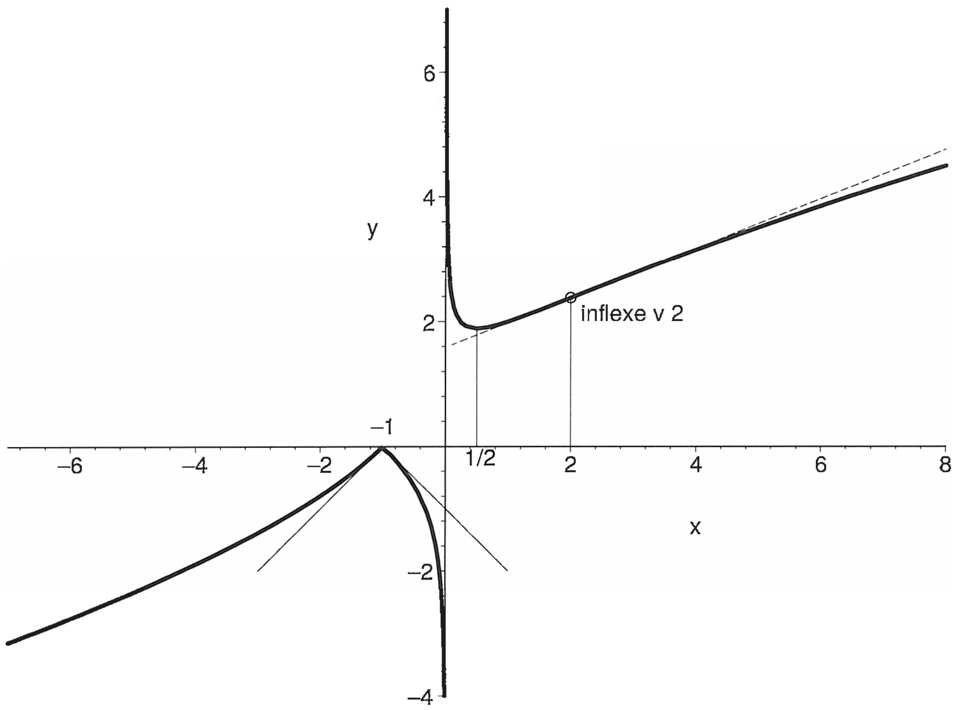
$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \infty \right) .$$

- Druhá derivace po nepříliš složitém výpočtu vyjde:

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(1+x) \left(\frac{2x-1}{3x^{\frac{4}{3}}} \right)' = \frac{2}{9} \operatorname{sgn}(1+x) \frac{2-x}{x^{\frac{7}{3}}} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} .$$

Funkce tedy má inflexní bod $x = 2$, derivace v něm je $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \approx 0.397$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 2)$, a konkávní na $(-1, 0)$ a $(2, +\infty)$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- obor hodnot .... 2 body
- limity v obou nekonečnech a jednostranné limity v nule .... 1 bod
- neexistence asymptot .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 1 bod
- jednostranné derivace (limity derivací) .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 1 bod
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- inflexní bod .... 1 bod
- graf .... 2 body

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: druhá odmocnina je definovaná pro nezáporná reálná čísla, a jmenovatel zlomku musí být nenulový, tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, +\infty)$.

- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$ (je součtem, součinem, podílem a složením spojitých funkcí), není sudá, lichá, periodická. Platí, že $f \geq 0$ na celém definičním oboru, přičemž $f > 0$ právě když $x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$, $f(x) = 0$ právě když $x = 0$.

- Limity v krajních bodech definičního oboru, obor hodnot, asymptota:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-1+} f(x) = \lim_{x\to-1+} \frac{|x|}{\sqrt{x^3+1}} = +\infty\,.$$

Protože je f spojitá na $\langle -1, +\infty)$, a $f(0) = 0$, dává věta o nabývání mezihodnot, že oborem hodnot f jsou všechna nezáporná reálná čísla, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, +\infty)$. Limita výše zároveň říká, že $a := \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$. Protože $b := \lim_{x\to+\infty}(f(x) - a\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, existuje asymptota v $+\infty$, a sice $y = 0$.

- První derivace: pro $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ je

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}} \cdot \frac{2x(x^3+1) - 3x^2\cdot x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x\sqrt{x^3+1}}{|x|(x^3+1)^2}(2-x^3) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \frac{(2-x^3)}{(x^3+1)^{3/2}}\,.$$

- Protože funkce f je spojitá (mimo jiné i) v bodě 0, a protože níže uvedené limity existují, platí:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm 1,$$

tedy $f'(0)$ neexistuje.

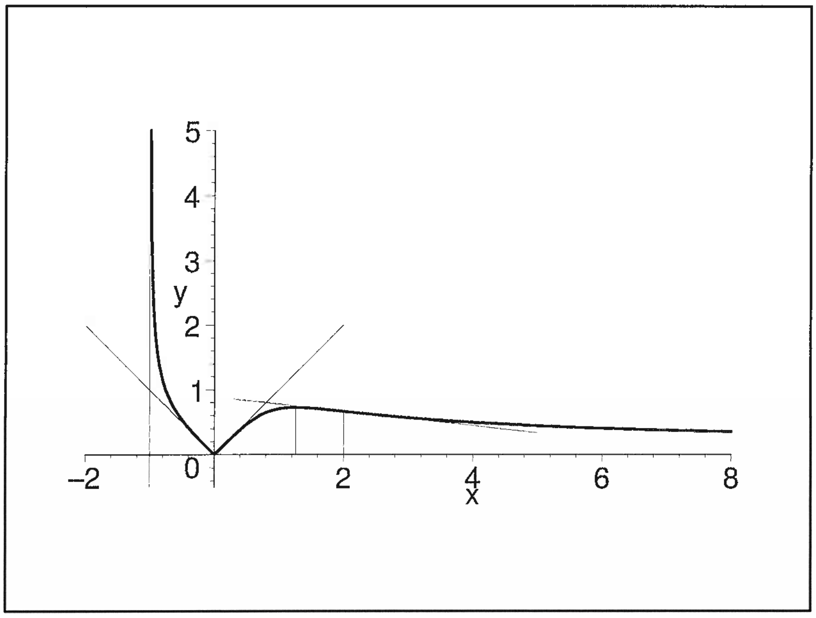
- Funkce f tedy roste na $(0, \sqrt[3]{2})$ a klesá na $(-1, 0)$ a na $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$. V bodě 0 je lokální (i globální) minimum 0, a v bodě $\sqrt[3]{2}$ je lokální maximum hodnoty $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}}{3}} \approx 0.727$. Funkce nemá globální maximum.

- Druhá derivace: pro $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ dostaneme

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \frac{(-3x^2)(x^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(2-x^3)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{(x^3+1)^3} = \\ &= -\frac{3x^2}{2}\operatorname{sgn} x \cdot \frac{2(x^3+1) + 3(2-x^3)}{2(x^3+1)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= -\frac{3x^2}{4(x^3+1)^{\frac{5}{2}}} \cdot (8-x^3)\operatorname{sgn} x\,. \end{aligned}$$

Funkce je tedy konkávní na intervalu $(0, 2)$, a konvexní na intervalech $(-1, 0)$ a $(2, +\infty)$. Funkce má inflexní bod $x = 2$ ($f'(2) = -\frac{1}{9}$).

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- obor hodnot .... 1 bod
- limity v krajních bodech def. oboru .... 1 bod
- asymptota .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 1 bod
- jednostranná derivace v 0 (limity derivace) .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- inflexní bod .... 1 bod
- graf .... 2 body

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \frac{1}{2}\arccos(1 - \log^2 x),$$

kde $\log x$ ($= \ln x$) je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: musí platit $x > 0$ a zároveň $-1 \le 1 - \log^2 x \le 1$, tedy $0 \le \log^2 x \le 2$, neboli $-\sqrt{2} \le \log x \le \sqrt{2}$. Celkově tedy máme $\mathcal{D}(f) = \langle e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\rangle$.

- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, neboť je součinem, rozdílem a složením spojitých funkcí. Definiční obor ukazuje, že funkce nemá symetrie (není sudá, lichá, periodická). Dále je $f \ge 0$ na $\mathcal{D}(f)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Limity v krajních bodech definičního oboru jsou díky spojitosti funkce v těchto bodech rovny přímo funkčním hodnotám:
$$f(e^{-\sqrt{2}}) = f(e^{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\arccos(1-2) = \frac{\pi}{2}.$$

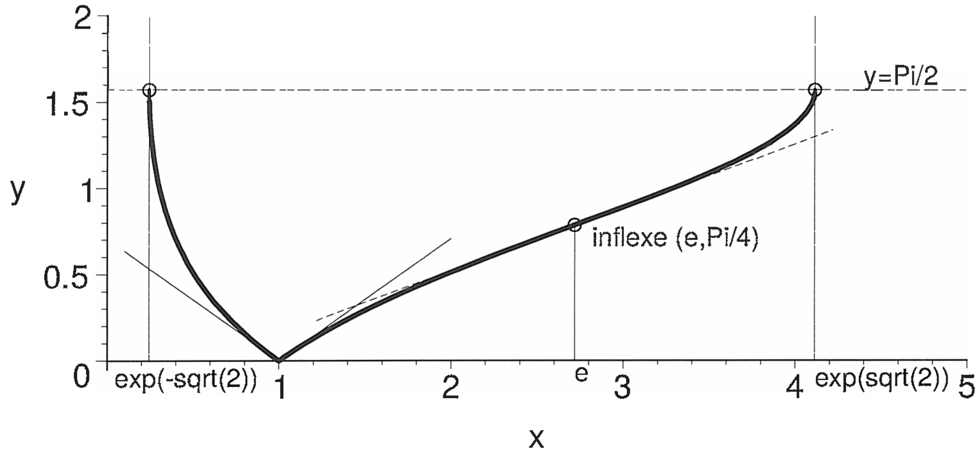
- První derivace (výrazy ve jmenovateli určují, pro která x tento výpočet neplatí):
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{1-(1-\log^2 x)^2}}\cdot\frac{(-2\log x)}{x} = \frac{\log x}{x\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x}} = \\ &= \frac{\log x}{x|\log x|\sqrt{2-\log^2 x}} = \frac{\operatorname{sgn}(\log x)}{x\sqrt{2-\log^2 x}}, \qquad x \in \mathcal{D}(f)\setminus\{e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}\}. \end{aligned}$$
Funkce f je spojitá v bodech $e^{-\sqrt{2}}$ (zprava), 1 (oboustranně), $e^{\sqrt{2}}$ (zleva), proto lze jednostranné derivace v těchto bodech získat takto (pokud tedy příslušné limity derivací existují, což, jak ukáže výpočet, platí):
$$f'_+(e^{-\sqrt{2}}) = \lim_{x\to e^{-\sqrt{2}}+} f'(x) = -\infty, \qquad f'_-(e^{\sqrt{2}}) = \lim_{x\to e^{\sqrt{2}}-} f'(x) = +\infty,$$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Z hodnot posledních dvou limit plyne, že derivace $f'(1)$ neexistuje.

- Funkce f klesá na $\langle e^{-\sqrt{2}}, 1\rangle$ a roste na $\langle 1, e^{-\sqrt{2}}\rangle$. V bodě 1 je lokální (i globální) minimum hodnoty 0, v bodech $e^{-\sqrt{2}}$ a $e^{\sqrt{2}}$ jsou globální maxima hodnoty $\frac{\pi}{2}$.

- Obor hodnot je tedy $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, asymptoty v nekonečnech nemá smysl uvažovat.

- Druhá derivace:
$$f''(x) = \operatorname{sgn}(\log x)\cdot\frac{-\left(\sqrt{2-\log^2 x} - \frac{\log x}{\sqrt{2-\log^2 x}}\right)}{x^2(2-\log^2 x)} = \operatorname{sgn}(\log x)\frac{\log^2 x + \log x - 2}{x^2\sqrt{(2-\log^2 x)^3}},$$
$$x \in \mathcal{D}(f)\setminus\{e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}\}.$$
Řešením kvadratické rovnice $\log^2 x + \log x - 2 = 0$ dostaneme $\log x = -2$, $\log x = 1$. První kořen leží mimo definiční obor, tedy $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Výraz ve jmenovateli nemění znaménko, tedy dostaneme, že f je konvexní na $\langle e^{-\sqrt{2}}, 1\rangle$ a na $\langle e, e^{\sqrt{2}}\rangle$, je konkávní na $\langle 1, e\rangle$. V bodě $[e, \frac{\pi}{4}]$ je inflexní bod, hodnota derivace v tomto bodě je $f'(e) = \frac{1}{e}$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- obor hodnot .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 2 body
- jednostranné derivace (limity derivací) v $e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}$ .... 2 body
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- inflexní bod .... 1 bod
- graf .... 2 body

Některé časté chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- neuvedení bodů $e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}$, pro které neplatí obecný vzorec pro f' resp. f''
- odmocňování podle schématu „$\sqrt{A^2} = A$", přičemž správně je $\sqrt{A^2} = |A|$
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací

Řešení. Definiční obor funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Na každém z těchto dvou intervalů platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0\,. \end{aligned}$$

Zadaná funkce je tedy na intervalu $(0, \infty)$ konstantní podle Věty 5.2.9 a dosazením bodu $x = 1$ dostaneme

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Funkce f je tedy rovna $\frac{\pi}{2}$ na celém intervalu $(0, \infty)$. Analogicky dosazením bodu $x = -1$ dostaneme, že f je rovna $-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

5.6.41. Příklad. Nechť funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$.

Řešení. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje polynom P_n takový, že

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} P_n(\frac{1}{x}) & \text{pokud } x \neq 0, \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}$$

(zde využíváme úmluvu $f^{(0)} = f$). Toto tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Předpokládejme nyní, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3} P_n(\frac{1}{x})\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Označme pro $y \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(y) = -y^2 P_n'(y) + 2y^3 P_n(y).$$

Pak P_{n+1} je polynom a platí

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pišme nyní polynom P_n jako $P_n(y) = \sum_{k=0}^m a_k y^k$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.5.1 dokážeme (5.42).

Položíme-li
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$
máme $\lim a_n = 0$ a
$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n)\right) = -\infty,$$
a tedy f' není omezená zdola na žádném okolí 0. Podobně, položíme-li
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad n \in \mathbb{N},$$
máme $\lim b_n = 0$ a
$$\lim_{n\to\infty} f'(b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{(2n+1)\pi}\cos((2n+1)\pi)\right) = \infty,$$
a tedy f' není omezená shora na žádném okolí 0. ♣

3

5.5.3. Příklad. Nechť f je reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$, pro který platí, že $-x \in \mathcal{D}(f)$, kdykoliv $x \in \mathcal{D}(f)$. Nechť $a \in \mathcal{D}(f)$ a existuje $f'_+(a)$. Pak existuje $f'_-(-a)$ a platí
$$f'_-(-a) = \begin{cases} -f'_+(a), & f \text{ je sudá}, \\ f'_+(a), & f \text{ je lichá}. \end{cases}$$

Řešení. Nechť $\delta \in (0,\infty)$ je takové, že $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}(f)$, a předpokládejme, že f je sudá. Pak platí $(a-\delta, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Položme
$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in (a, a+\delta).$$
Pak $g(x) = \frac{f(-x)-f(-a)}{x-a}$, $x \in (a, a+\delta)$, a použitím Věty 4.2.20 dostáváme
$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x\to a_+} g(x) = \lim_{y\to a_-} g(-y) = \lim_{y\to a_-} \frac{f(y)-f(-a)}{-y-a} \\ &= -\lim_{y\to a_-} \frac{f(y)-f(-a)}{a-(-a)} = f'_-(-a). \end{aligned}$$

Tvrzení pro případ liché funkce se ověří obdobně. ♣

5.5.4. Příklad. Nechť
$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

existuje právě tehdy, když $a > 0$. V tom případě pak derivace funkce f_a v bodě 0 zprava existuje a je rovna 0. Dodefinujeme-li tedy f_a hodnotou 0 na intervalu $(-\infty, 0]$, dostaneme funkci s vlastní derivací na $\mathbb{R}$. ♣

Následující příklad je zobecněním Bernoulliovy nerovnosti na intervalu $(-1, \infty)$ (vizte Příklad 1.8.10).

4

5.5.17. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in [1, \infty)$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$(1 + x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x.$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = (1 + x)^{\alpha} - 1 - \alpha x.$$

Pak je f spojitá a platí

$$f'(x) = \alpha \left((1 + x)^{\alpha - 1} - 1\right), \quad x \in (-1, \infty),$$

což znamená, že $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (-1, 0)$ a $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Tedy f je nerostoucí na intervalu $(-1, 0]$ a neklesající na intervalu $[0, \infty)$ (vizte Větu 5.4.7). Tudíž f nabývá svého minima v bodě 0. Protože $f(0) = 0$, je f nezáporná na $(-1, \infty)$. Odtud plyne dokazovaná nerovnost. ♣

5.5.18. Příklad. Ukažte, že pro každé kladné $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, platí

$$\sqrt{ab} < \frac{b - a}{\log b - \log a} < \frac{a + b}{2}.$$

Řešení. Předpokládejme, že $a < b$. Podělíme zadané nerovnosti číslem a a položíme $\frac{b}{a} = x$. Tím dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt{x} < \frac{x - 1}{\log x} < \frac{1 + x}{2}, \quad x \in (1, \infty) \tag{5.46}$$

První nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$x \log^2 x < (x - 1)^2, \quad x \in (1, \infty),$$

která plyne z nerovnosti

$$\log(1 + x) < \frac{x}{\sqrt{1 + x}}, \quad x \in (0, \infty), \tag{5.47}$$

dosazením $x - 1$ za x.

Dokažme tedy (5.47). K tomuto účelu položme

$$f(x) = \log(1 + x) - \frac{x}{\sqrt{1 + x}}, \quad x \in [0, \infty).$$

Pak $f(0) = 0$ a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + x}\left(\sqrt{1 + x} - \frac{x}{2\sqrt{1 + x}}\right) = \frac{2\sqrt{1 + x} - 2 - x}{2(1 + x)\sqrt{1 + x}} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{1 + x} - (1 + \frac{x}{2})\right)}{2(1 + x)\sqrt{1 + x}} < 0, \quad x \in (0, \infty), \end{aligned}$$