

Průběh funkce - teorie

Teorie

Definice 1. Necht' $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M .

- Řekneme, že f nabývá v bodě x svého
- **maxima na M** , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x),$$

- **minima na M** , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \geq f(x),$$

- **ostrého maxima na M** , jestliže

$$\forall y \in M, y \neq x: f(y) < f(x),$$

- **ostrého minima na M** , jestliže

$$\forall y \in M, y \neq x: f(y) > f(x).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě x svého **lokálního maxima (lokálního minima, ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima) na M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že f nabývá v bodě x svého maxima (minima, ostrého maxima, ostrého minima) na $M \cap B(x, \delta)$.

Věta 2 (nutná podmínka existence extrému). Necht' I je nedegenerovaný interval, f je reálná funkce a a je vnitřním bodem I . Je-li a bodem lokálního extrému funkce f , pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

Věta 3 (vztah derivace a monotonie). Necht' I je interval a f je spojitá funkce na I . Necht' $\text{Int } I$ označuje množinu všech vnitřních bodů intervalu I . Necht' existuje $f'(x)$ pro každé $x \in \text{Int } I$. Potom

- je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \text{Int } I$, pak je f rostoucí na I ;
- je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in \text{Int } I$, pak je f neklesající na I ;
- je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \text{Int } I$, pak je f klesající na I ;
- je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in \text{Int } I$, pak je f nerostoucí na I .

Definice 4. Necht' f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi**, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že buď

•

$$\begin{aligned} \forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a} \\ \forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

nebo

•

$$\begin{aligned} \forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a} \\ \forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

Věta 5 (nutná podmínka pro inflexi). Necht' f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f''(a)$ a je různá od nuly, pak a není inflexním bodem funkce f .

Věta 6 (postačující podmínka pro inflexi). Necht' f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $c \in (a, b)$. Předpokládejme, že

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) < 0$$

nebo

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem f .

Definice 7. Necht' I je interval a necht' f je reálná funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je

- **konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Věta 8 (vztah druhé derivace a konvexity či konkávnosti). Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má f na $\text{Int } I$ spojitou první derivaci. Jestliže je f' rostoucí na $\text{Int } I$, pak f je ryze konvexní na I . Speciálně, je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \text{Int } I$, pak f je ryze konvexní na I .

Definice 9. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞ . Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0. \quad (1)$$

Analogicky definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 10 (tvar asymptoty). Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Analogické tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.