

1. cvičení - Soustavy ODR

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>

kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Zavedeme operátor derivace λ . Pak $\lambda u = u'$, $\lambda^2 u = u''$, $\lambda^2 u - \lambda u = u'' - u'$ atd. . .
2. Sestavíme matici \mathbf{A} a vytvoříme $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ (všechno převedeme na levou stranu).
3. Matici převedeme na trojúhelníkový tvar:
 - (a) Můžeme prohazovat řádky.
 - (b) Můžeme násobit řádky (nenulovým) číslem.
 - (c) Můžeme k řádku přičíst $P(\lambda)$ násobek jiného řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom.
 - (d) **Nemůžeme** násobit řádek polynomem λ - zvýšil by se řád soustavy.
 - (e) **Nemůžeme** dělit řádky polynomem λ .
4. Přepíšeme zpátky na tvar s derivacemi a vyřešíme.
5. Případně dořešíme podmínky.

Hinty

$$\int e^x \cos(ax) dx = \frac{ae^x \sin(ax)}{a^2 + 1} + \frac{e^x \cos(ax)}{a^2 + 1} + c$$
$$\int e^x \sin(bx) dx = -\frac{be^x \cos(bx)}{b^2 + 1} + \frac{e^x \sin(bx)}{b^2 + 1} + c$$

Příklady

1. (a)
$$\begin{aligned} u' &= 2u - 4v \\ v' &= u - 3v \end{aligned}$$

$$u(0) = 0, v(0) = -1$$

(b)
$$\begin{aligned} u' &= u - 4v \\ v' &= 2u - 3v \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} u' &= -7u + 9v \\ v' &= -u - v \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} u' &= 2u - 4v \\ v' &= u - 2v \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -u \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} u' &= 2u - 3v \\ v' &= u - 2v \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} u' &= 2u + v - w \\ v' &= 7u + 4v - w \\ w' &= 13u + 7v - 3w \end{aligned}$$

2. Zkouškové příklady

$$(a) \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$(d) \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$(b) \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$(e) \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$(c) \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

3. Najděte chybu. Jak ovlivní řešení? A proč?

$$u' = 2u - 4v$$

$$v' = u - 3v$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -(\lambda - 2) & (\lambda + 3)(\lambda - 2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ 0 & 4 + \lambda^2 - 6 + \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$v'' - v' - 2v = 0$$

$$u = v' + 3v$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)(\lambda - 1) \\ \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

$$v = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

$$u = c_1 e^x + (-2)c_2 e^{-2x} + 3c_1 e^x + 3c_2 e^{-x}$$

$$u = 4c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$